SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

$$\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{cases}$$

Ing. Idialy Montoya Aguilar

Esp. Docencia Universitaria

Mg. Educación

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión de la forma: $ax + by = c$
donde a, b, y c son números (coeficientes) y las incógnitas son x e y. Gráficamente representa una recta en el plano.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** será de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✔	$3 + 4(1) = 7$ ✔

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3, 1).

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución (3, 1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

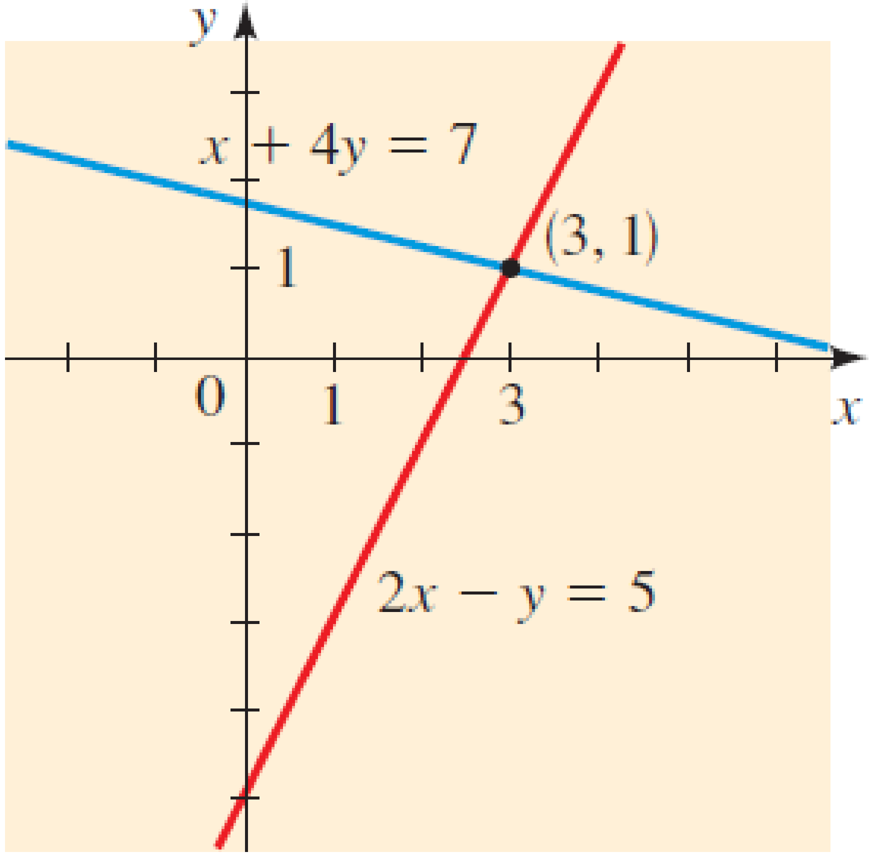

FIGURA 1

NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

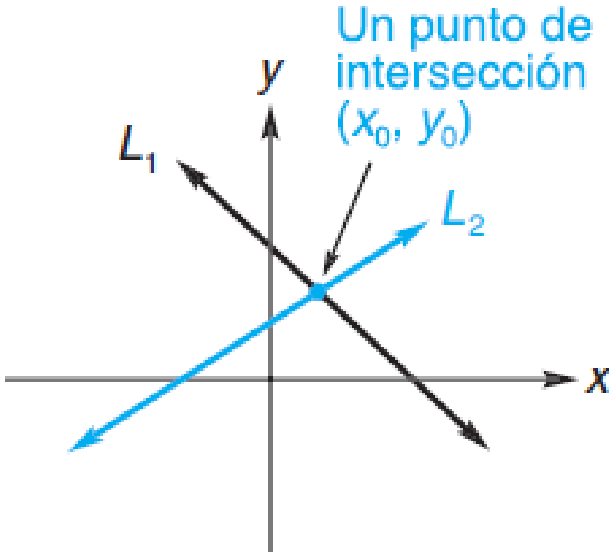

FIGURA 4.28 Sistema lineal (una solución).

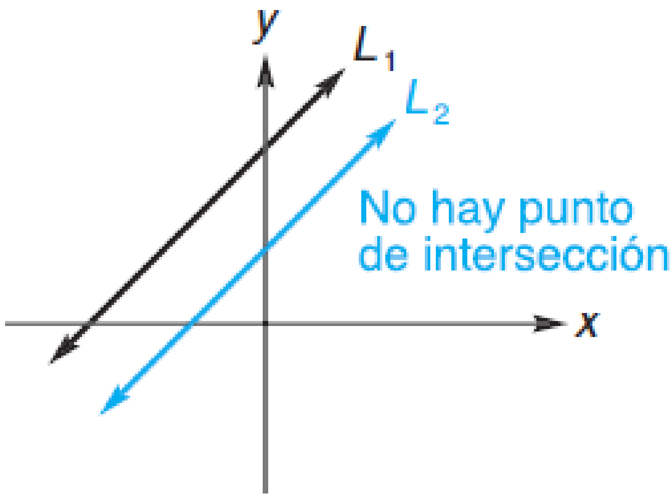

FIGURA 4.29 Sistema lineal (no hay solución).

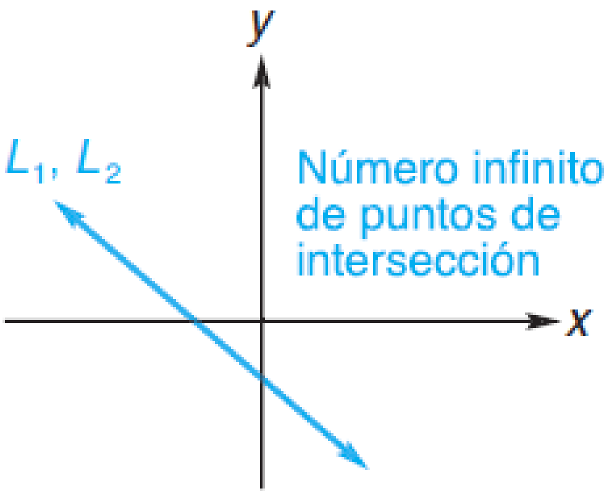

FIGURA 4.30 Sistema lineal (un número infinito de soluciones).

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

1. Se despeja una incógnita de una ecuación (la que te parezca más fácil de despejar)
2. Se sustituye en la otra ecuación, quedando una ecuación de primer grado.
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra.

Atención!!

En el paso 3 pueden suceder tres situaciones:

* Si llegas a $0 = 0$ entonces hay infinitas soluciones
* Si llegas a $0 = k$ (k distinto de cero) no hay solución
* Si llegas a un valor entonces hay una solución única y haces el paso 4.

Este método resulta fácil de aplicar cuando una de las incógnitas tiene coeficiente igual a uno o cuando una de las incógnitas te la dan ya despejada.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

1º Despejo por ejemplo la x de la primera ecuación:	$x = 2 - y$
2º Sustituyo	$2(2 - y) + y = 5$
3º Resuelvo la ecuación	$4 - 2y + y = 5$ $-y = 5 - 4$ $y = -1$
4º Sustituyo el valor obtenido en una ecuación	$x + (-1) = 2$ $x - 1 = 2$ $x = 3$
O bien sustituyes en la ecuación del primer paso	$x = 2 - (-1)$ $x = 3$

Solución ($x = 3$, $y = -1$)

EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Expanda} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplifique} \\ -5x &= 10 && \text{Reste 4} \\ x &= -2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

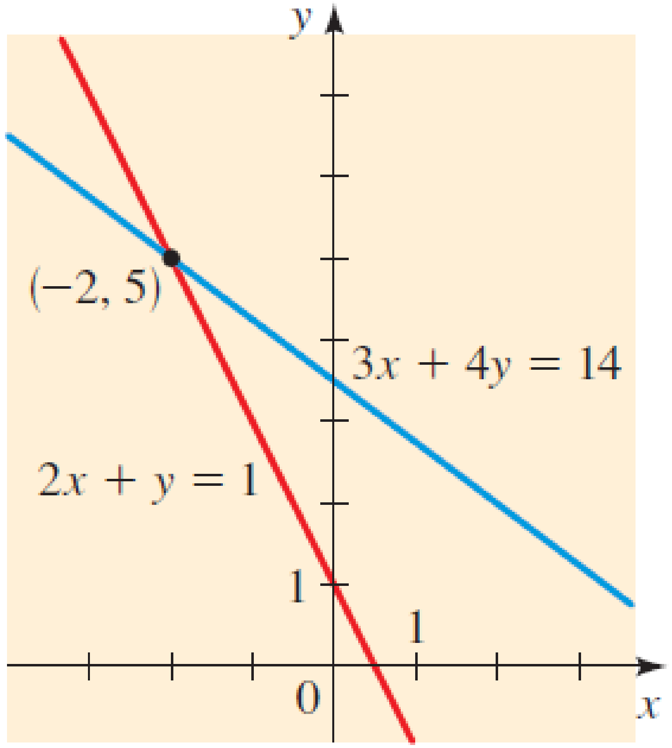

FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones (la que te parezca más fácil de despejar)
2. Se igualan las expresiones quedando una ecuación con una incógnita
3. Se resuelve la ecuación.
4. El valor obtenido para la incógnita lo sustituyes en una de las ecuaciones y operando sacas la otra. También se puede sustituir en una de las dos ecuaciones obtenidas en el punto 1.

Atención!!

En el paso 3 pueden suceder las tres situaciones descritas anteriormente

Este método es útil cuando la misma incógnita aparece ya despejada de las dos ecuaciones, en otro caso es más conveniente emplear cualquiera de los otros métodos pues son más cortos.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

1º Despejo por ejemplo la y de las dos ecuaciones:	$y = 2 - x$ $y = 5 - 2x$
2º Igualo	$2 - x = 5 - 2x$
3º Resuelvo la ecuación	$-x + 2x = 5 - 2$ $x = 3$
4º Sustituyo el valor obtenido en una ecuación	$3 + y = 2$ $y = 2 - 3$ $y = -1$
O bien sustituyes en la ecuación del primer paso	$y = 2 - 3$ $y = -1$

Solución $(x = 3,\ y = -1)$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Para aplicar el método de reducción se multiplicarán las dos ecuaciones o una de ellas por un número conveniente de manera que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente cambiado de signo en las dos ecuaciones.

1. Se elige la incógnita (la que te parezca más fácil)
2. Se hace que los coeficientes de dicha incógnita en las dos ecuaciones sean opuestos.
3. Se suman las dos ecuaciones quedando una ecuación con una incógnita que se resuelve.
4. Se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones.

Atención!!

En el paso 3 pueden suceder las tres situaciones descritas anteriormente

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$$

1º Elijo la incógnita x.

2º Para que tengan coeficientes opuestos multiplico la segunda ecuación por (-2)

$$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ -2x+4y=-8 \end{cases}$$

3º Sumando las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + 4y & = & 0 \\ + & \underline{-2x + 4y} & \underline{=} & \underline{-8} \\ & 8y & = & -8 \\ & y & = & -1 \end{array}$$

4º Se sustituye en una ecuación

$$x - 2 \cdot (-1) = 4$$
$$x = 4 - 2$$
$$x = 2$$

$$\boxed{\text{Solución} \quad (x = 2,\ y = -1)}$$

EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & \text{Sistema} \\ \hline 4x \qquad = 16 & & \text{Sume} \\ x = 4 & & \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 && \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y &= 2 && \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ -2y &= -2 && \text{Reste 4} \\ y &= 1 && \text{Despeje } y \end{aligned}$$

La solución es $(4, 1)$. La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto $(4, 1)$.

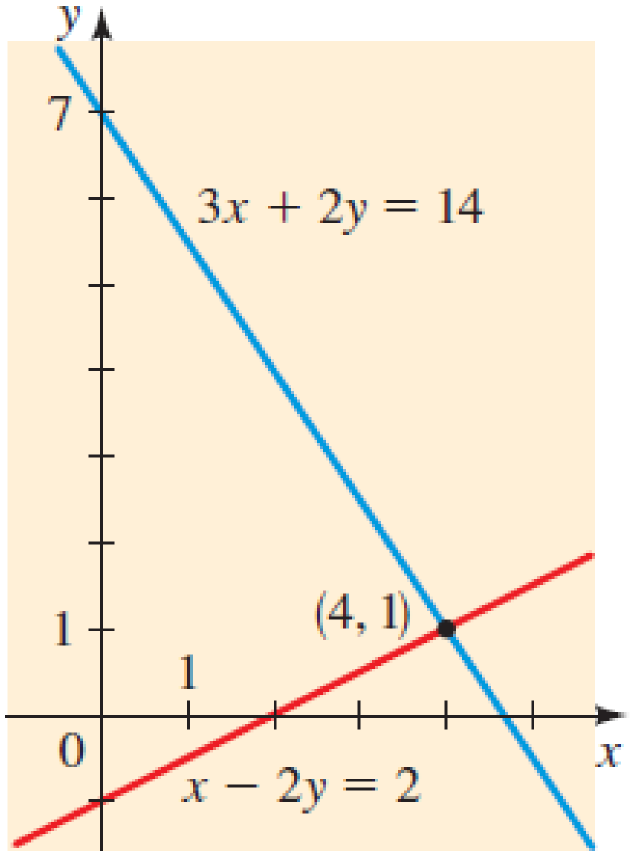

FIGURA 3

EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 & 3 \times \text{Ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & 2 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Sume}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto x como y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

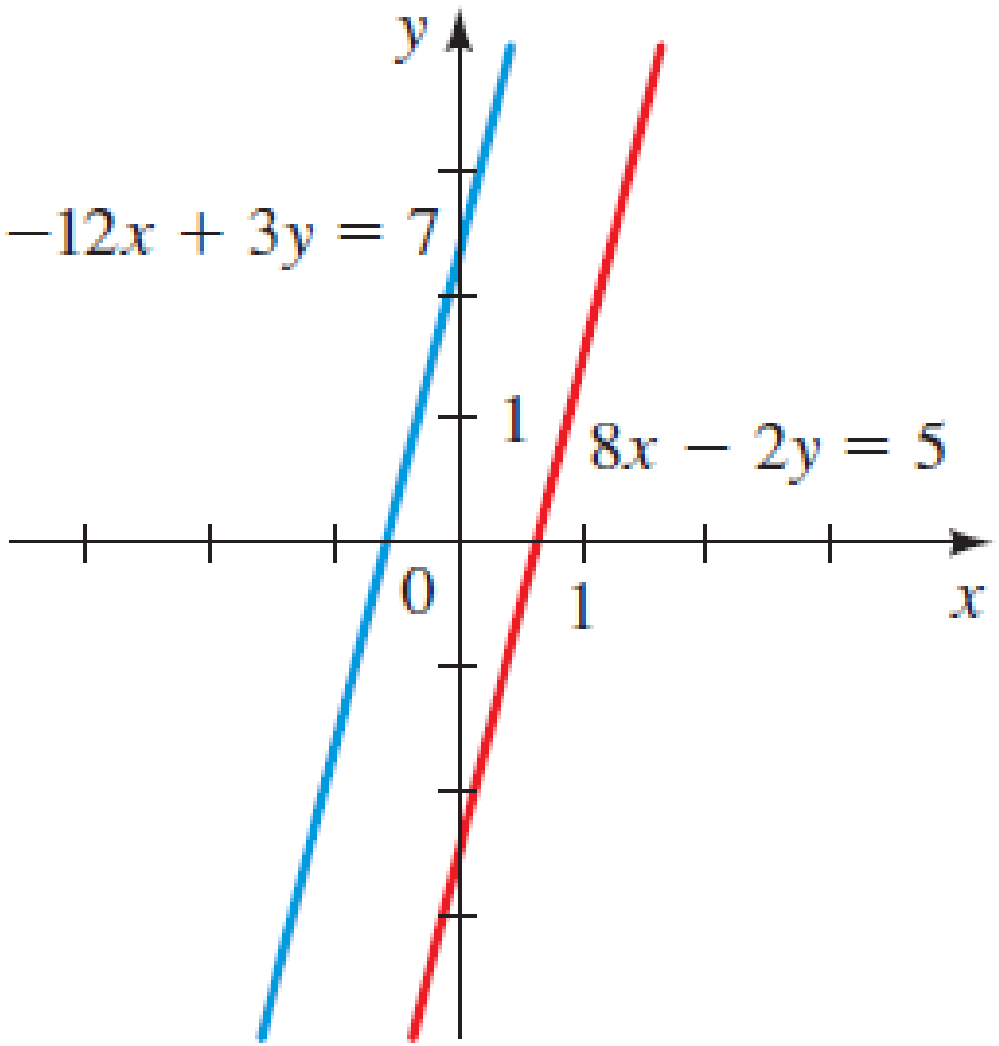

FIGURA 7

EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & 4 \times \text{Ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & 3 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con t representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$

$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

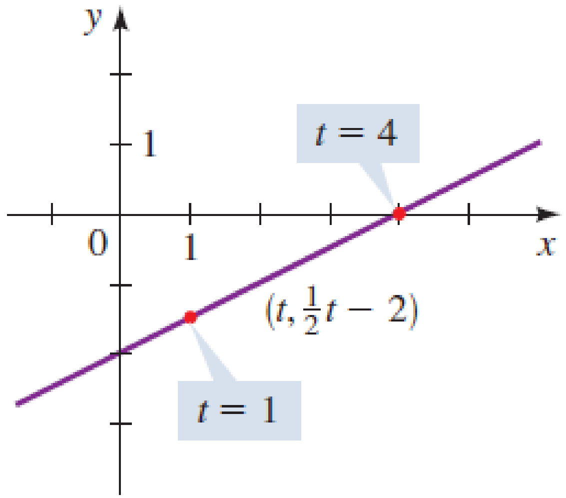

FIGURA 8

Modelado con sistemas lineales

GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas x y y o con alguna otra letra).
2. **Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
3. **Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Problema resuelto 1

Si se tienen dos soluciones de ácido nítrico, una al 25% y la otra al 65%, ¿cuántos litros de cada solución se deben mezclar para obtener 5 litros de solución de ácido nítrico al 50%?

Solución:

Sea x los litros de solución al 25% que se utilizarán e y los litros de solución al 65%. Como se desea preparar 5 litros, la ecuación es: $x + y = 5$.

La cantidad de ácido de la primera solución es igual al 25% de x, o sea $25 \cdot \frac{x}{100}$. Asimismo, la segunda solución es el 65% de y, es decir, $65 \cdot \frac{y}{100}$.
La suma de ambas cantidades representa la cantidad total de ácido en la mezcla, que debe ser igual al 50% del total. Esto es:

$$25 \cdot \frac{x}{100} + 65 \cdot \frac{y}{100} = 50 \cdot \frac{5}{100}$$

Al multiplicar por 20, se obtiene la ecuación equivalente $5x + 13y = 50$, que junto a la primera ecuación planteada forman el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 5x + 13y &= 50 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} -5x - 5y &= -25 \\ 5x + 13y &= 50 \end{aligned}\right|$$

$$8y = 25$$

De donde $y = \frac{25}{8}$. Remplazando en la primera ecuación, se obtiene $x = \frac{15}{8}$.

Comprobación:

Se tiene que $x + y = \frac{25}{8} + \frac{15}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

Por otro lado, $5x + 13y = 5 \cdot \frac{15}{8} + 13 \cdot \frac{25}{8} = \frac{75}{8} + \frac{325}{8} = \frac{400}{8} = 50$.

Es decir, las soluciones satisfacen también la segunda ecuación del sistema.

Por lo tanto, $x = \frac{15}{8}$ litros e $y = \frac{25}{8}$ litros es la solución del problema.

Una tienda de música recaudó en una semana $ 360 000 por la venta de discos compactos de *reggaeton* y de rock. El precio de los CD de *reggaeton* es $ 6 000 y el de los CD de rock es $ 8 000.

Para resolver un problema como el presentado, es conveniente plantear o modelar el problema a través de ecuaciones. Observa:

Sea x cantidad vendida de CD de *reggaeton*.

Sea y cantidad vendida de CD de rock.

Una ecuación que representa la situación anterior es:

$6\,000x + 8\,000y = 360\,000$

Si a la situación anterior se agrega el hecho de que el total de discos compactos que se vendieron entre ambos grupos fue 55, se puede agregar una nueva ecuación al problema:

$$x + y = 55$$

Así pues, el problema se reduce ahora a resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$6\,000x + 8\,000y = 360\,000$$
$$x + y = 55$$

Sistemas con tres variables

(1) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 4y - z = 6. & (1) \\ 2x + 5y - 7z = -9. & (2) \\ 3x - 2y + z = 2. & (3) \end{cases}$$

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 2, se tiene:

$$\begin{cases} 2x + 8y - 2z = 12 \\ -2x - 5y + 7z = 9 \end{cases}$$

$$\text{Restando:} \qquad 3y + 5z = 21 \qquad (4)$$

Combinamos la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a combinarla con (1) para eliminar la x. Multiplicando (1) por 3 tenemos:

$$\begin{cases} 3x + 12y - 3z = 18 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Restando:} \qquad 14y - 4z = 16$$

$$\text{Dividiendo entre 2:} \qquad 7y - 2z = 8 \qquad (5)$$

Ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido **(4)** y **(5)**, y formamos un sistema:

$$\begin{aligned} 3y + 5z &= 21. \qquad \textbf{(4)} \\ 7y - 2z &= 8. \qquad \textbf{(5)} \end{aligned}$$

Resolvamos este sistema. Vamos a eliminar la z multiplicando **(4)** por 2 y **(5)** por 5:

$$\begin{array}{r} 6y + 10z = 42 \\ 35y - 10z = 40 \\ \hline 41y \qquad\quad = 82 \\ \boxed{y = 2} \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en **(5)** se tiene:

$$\begin{aligned} 7(2) - 2z &= 8 \\ 14 - 2z &= 8 \\ -2z &= -6 \\ \boxed{z = 3.} \end{aligned}$$

Sustituyendo $y = 2$, $z = 3$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en **(1)**, se tiene:

$$\begin{aligned} x + 4(2) - 3 &= 6 \\ x + 8 - 3 &= 6 \\ \boxed{x = 1.} \end{aligned} \qquad \text{R.} \begin{cases} x = 1. \\ y = 2. \\ z = 3. \end{cases}$$

VERIFICACION

Los valores $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ tienen que satisfacer las tres ecuaciones dadas. Hágase la sustitución y se verá que las tres ecuaciones dadas se convierten en identidad.

EJEMPLO 5 Resolución de un sistema lineal con tres variables

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3, \\ -x + 2y + 2z = 1, \\ x - y - 3z = -6. \end{cases}$$

27. Tejidos Una fábrica de tejidos produce un tejido hecho a partir de diferentes fibras. Con base en algodón, poliéster y nylon, el propietario necesita producir un tejido combinado que cueste \$3.25 por libra fabricada. El costo por libra de estas fibras es de \$4.00, \$3.00 y \$2.00, respectivamente. La cantidad de nylon debe ser la misma que la cantidad de poliéster. ¿Cuánto de cada fibra debe tener el tejido final?

Bibliografía

- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning Editores S.A.