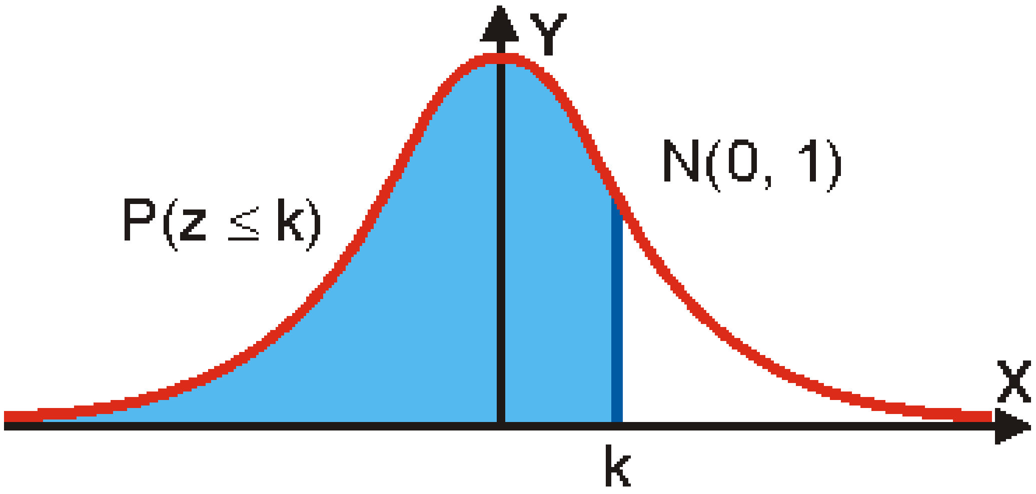
Distribuciones Continuas de Probabilidad

5ta. Unidad



Ing. Idialy Montoya Aguilar
Esp. Docencia Universitaria
Mg. Educación

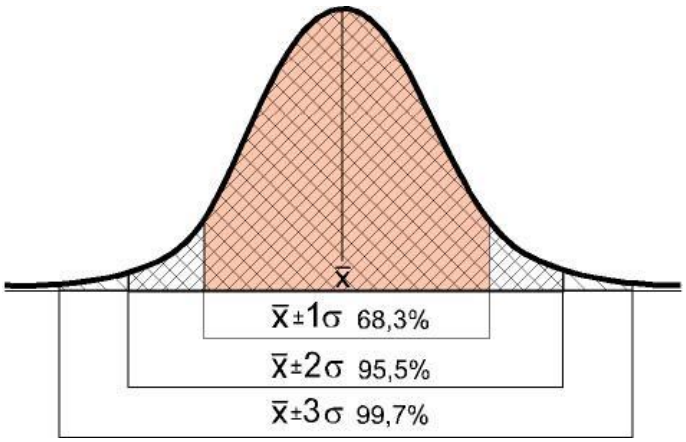
Distribuciones Continuas de Probabilidad

Distribución Normal:

La distribución continua de probabilidad más importante en todo el campo de la estadística es la ***distribución normal***. Su grafica, que se denomina ***curva normal***, es la curva con la forma de campana, la cual describe aproximadamente muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

La distribución normal a menudo se denomina **distribución gaussiana**, en honor de Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Le ecuación matemática para la distribución de probabilidad de la variable normal depende de los dos parámetros μ y σ, su media y desviación estándar.



Áreas bajo la curva normal:

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad se construye de modo que el área bajo la curva limitada por las dos ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre $x = x_1$ y $x = x_2$.

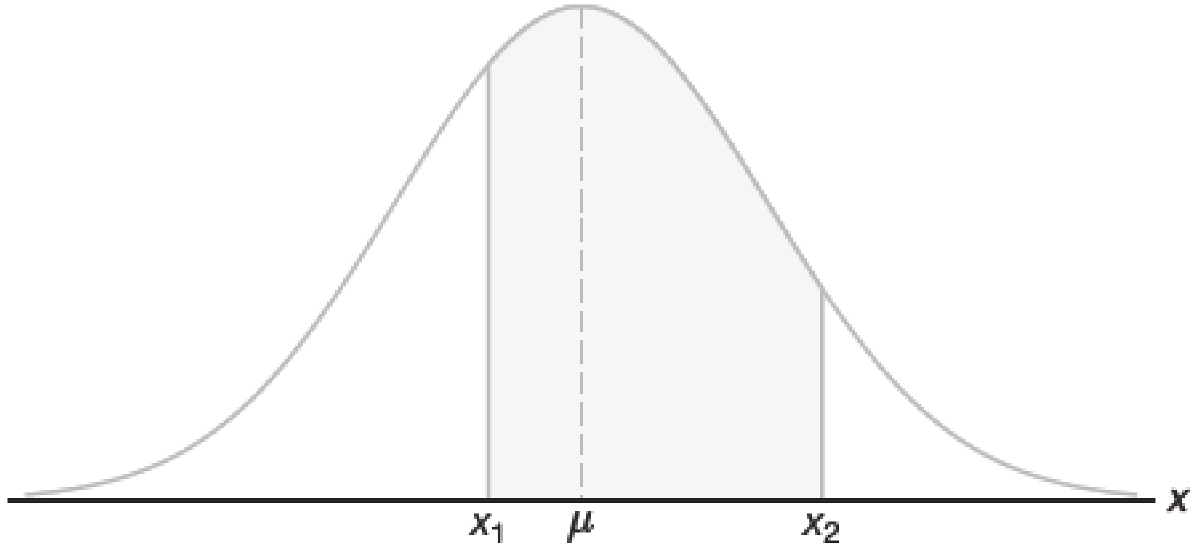


Figura 6.6: $P(x_1 < X < x_2)$ = área de la región sombreada.

La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar.**

Áreas bajo la curva normal:

Por fortuna es posible transformar todas las observaciones de cualquier variable aleatoria normal X en un nuevo conjunto de observaciones de una variable aleatoria normal Z, con media 0 y varianza 1, esto puede realizarse por medio de la transformación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

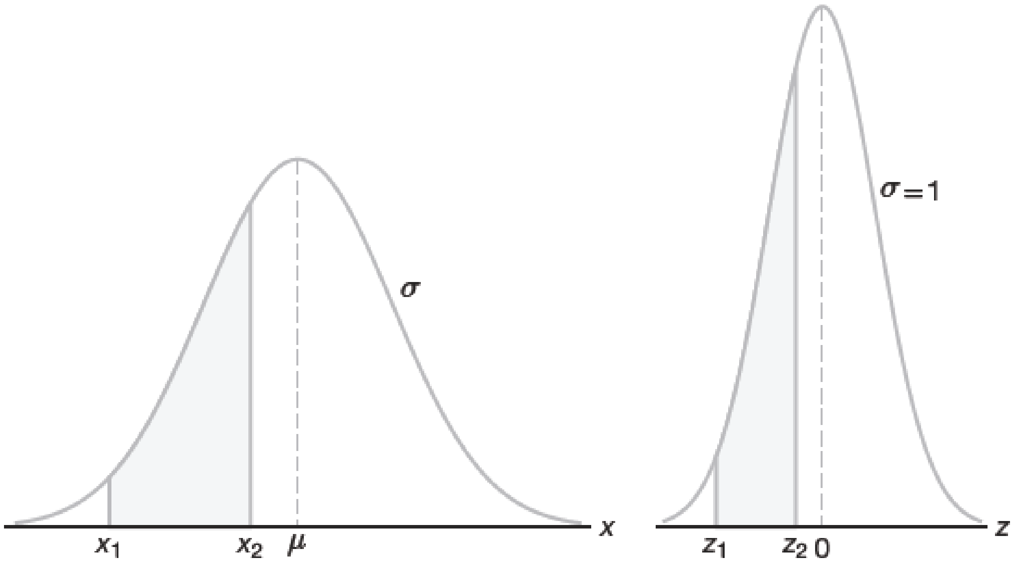
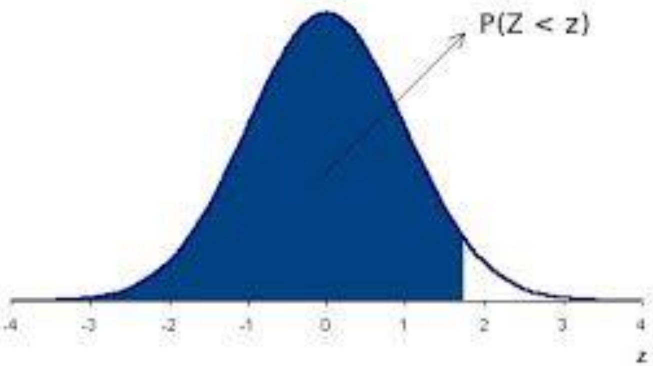


Figura 6.8: Distribuciones normales original y transformada.

Donde: Z se lee en las tablas A3. X es la variable aleatoria, μ es la media de la población y σ es la desviación estándar.



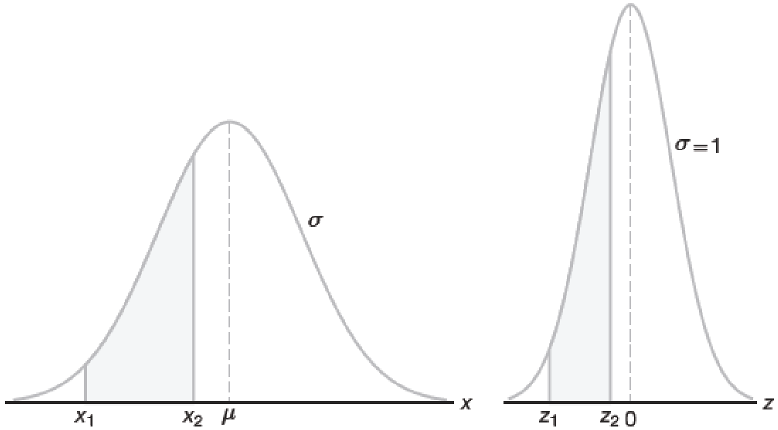


Figura 6.8: Distribuciones normales original y transformada.

La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar**.

Las distribuciones original y transformada se ilustran en la figura 6.8. Como todos los valores de X que caen entre x_1 y x_2 tienen valores z correspondientes entre z_1 y z_2, el área bajo la curva X entre las ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ de la figura 6.8 es igual al área bajo la curva Z entre las ordenadas transformadas $z = z_1$ y $z = z_2$.

Ahora hemos reducido el número requerido de tablas de áreas de curva normal a una, la de la distribución normal estándar. La tabla A.3 indica el área bajo la curva normal estándar que corresponde a $P(Z < z)$ para valores de z que van de –3.49 a 3.49. Para ilustrar el uso de esta tabla calculemos la probabilidad de que Z sea menor que 1.74. Primero, localizamos un valor de z igual a 1.7 en la columna izquierda, después nos movemos a lo largo del renglón hasta la columna bajo 0.04, donde leemos 0.9591. Por lo tanto, $P(Z < 1.74) = 0.9591$. Para calcular un valor z que corresponda a una probabilidad dada se invierte el proceso. Por ejemplo, se observa que el valor z que deja un área de 0.2148 bajo la curva a la izquierda de z es –0.79.

Ejemplo 6.2:

Dada una distribución normal estándar, calcule el área bajo la curva que se localiza

a) a la derecha de $z = 1.84$, y

b) entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$.

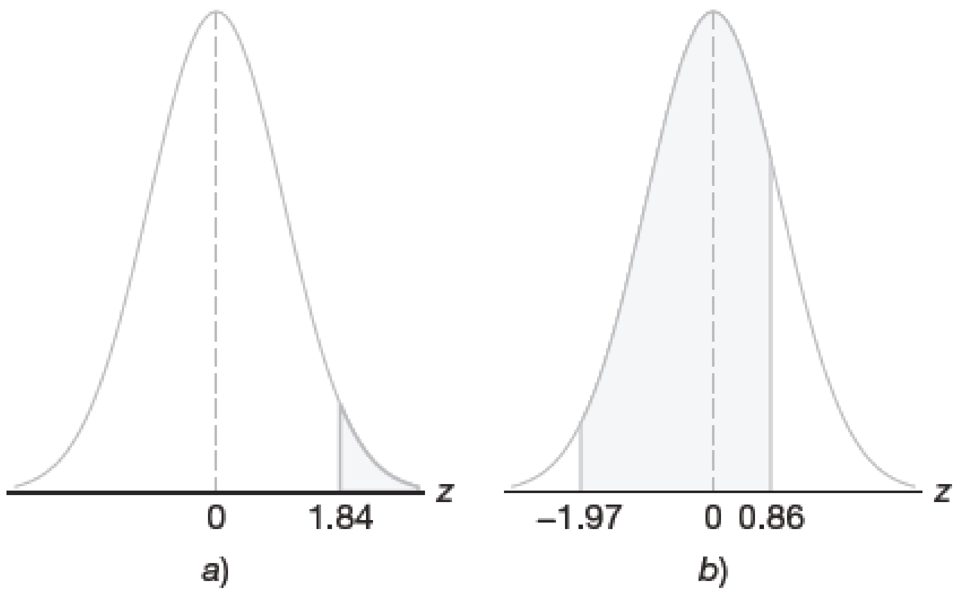


Figura 6.9: Áreas para el ejemplo 6.2.

***Solución*:**

Véase la figura 6.9 para las áreas específicas.

a) El área en la figura 6.9*a* a la derecha de $z = 1.84$ es igual a 1 menos el área en la tabla A.3 a la izquierda de $z = 1.84$, a saber, $1 - 0.9671 = 0.0329$.

b) El área en la figura 6.9*b* entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$ es igual al área a la izquierda de $z = 0.86$ menos el área a la izquierda de $z = -1.97$. A partir de la tabla A.3 encontramos que el área que se desea es $0.8051 - 0.0244 = 0.7807$.

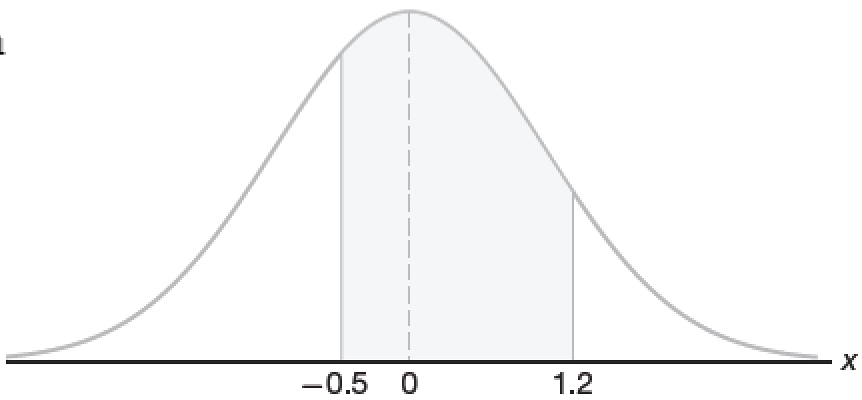
Distribución normal estándar.

Es la distribución de una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1.

Ejemplo : Dada una distribución normal con $\mu = 50$ **y** $\sigma = 10$, encuentre la probabilidad de que X tome un valor entre 45 y 62.

Solución

Los valores Z que corresponden a $X_1 = 45$ y $X_2 = 62$ son



$$Z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5$$

$$Z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

Por tanto, $P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$

La $P(-.05 < Z < 1.2)$ se muestra por el área de la región sombreada de la figura 6.11. Esta área se puede encontrar al restar el área a la izquierda de $z = 1.2$. Con el uso de la tabla A.3, tenemos

$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085$

$P = 0.5764$

Ejemplo 6.5: Dado que X tiene una distribución normal con $\mu = 300$ y $\sigma = 50$, calcule la probabilidad de que X tome un valor mayor que 362.

***Solución*:** La distribución de probabilidad normal que muestra el área sombreada que se desea se presenta en la figura 6.12. Para calcular $P(X > 362)$ necesitamos evaluar el área bajo la curva normal a la derecha de $x = 362$. Esto se puede realizar transformando $x = 362$ al valor z correspondiente, obteniendo el área a la izquierda de z de la tabla A.3 y después restando esta área de 1. Encontramos que

$$z = \frac{362 - 300}{50} = 1.24.$$

De ahí,

$$P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24) = 1 - 0.8925 = 0.1075.$$

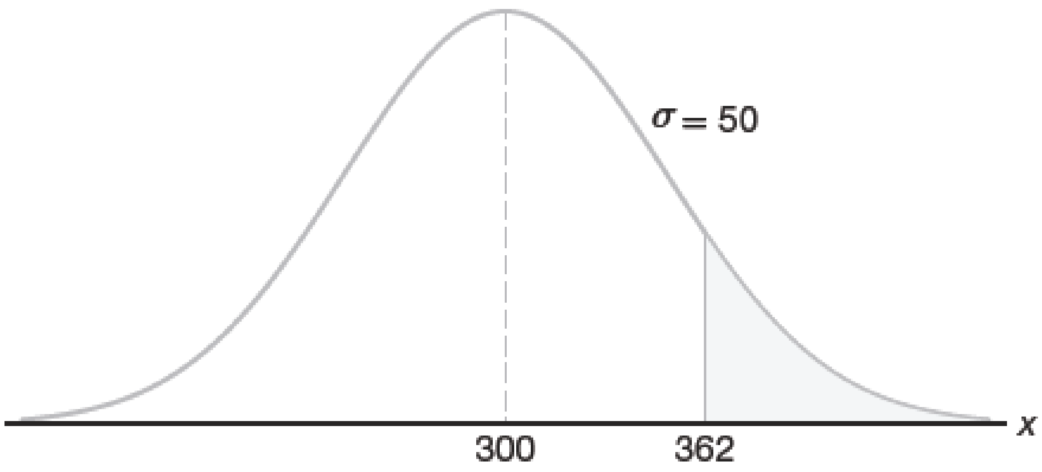


Figura 6.12: Área para el ejemplo 6.5.

El peso medio de 300 estudiantes de cierta universidad es de 70 kg, y la desviación típica es de 10 Kg. Supuesto que los pesos están normalmente distribuidos. ¿cuántos estudiantes tendrán pesos?

a. Entre 65 y 75 Kg
b. Mayores de 85 Kg
c. Menores de 55 Kg

5) Un producto tiene un peso promedio de 75 kg con una desviación estándar de 10 kg

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto pese más de 85 kg? R/ 0.1587
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto pese menos de 55 Kg? R/ 0.0228
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto pese entre 60 y 80 Kg? R/ 0.6247

2) Un envió de 8 automóviles contiene tres de ellos con pequeñas fallas en la pintura. Si una agencia recibe en forma aleatoria tres de estos automóviles.

   a. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X que represente el número de automóviles adquiridos por la agencia que tuvieron defectos de pintura y el valor esperado (μ).
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 autos salgan con defecto de pintura?

Bibliografía

- Walpole, R., Myers, S. y Ye, K., (2012), Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, 9na Ed. México, Pearson.