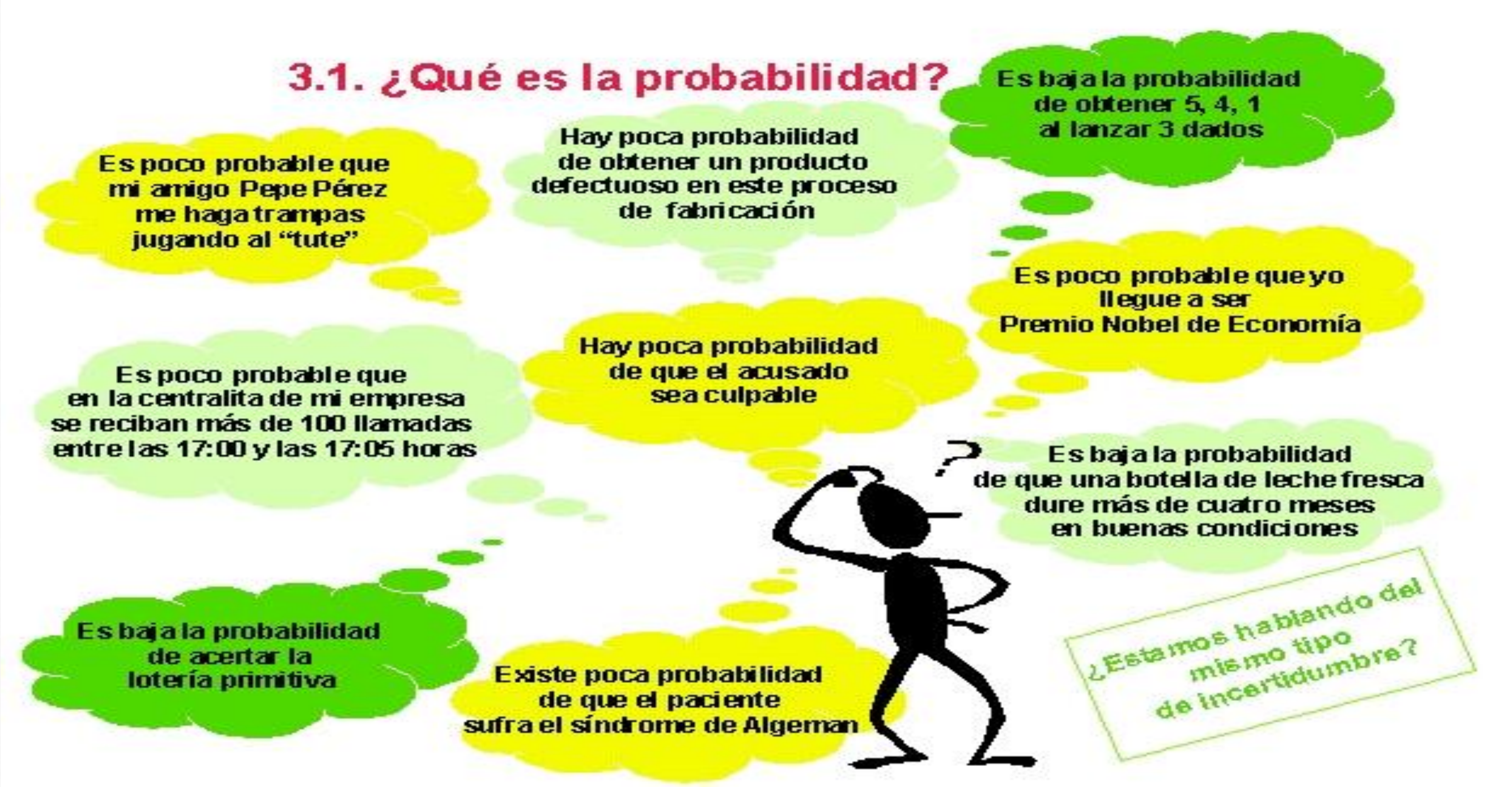
Probabilidad de un Evento

2da. Unidad

Ing. Idaly Montoya Aguilar

Probabilidad

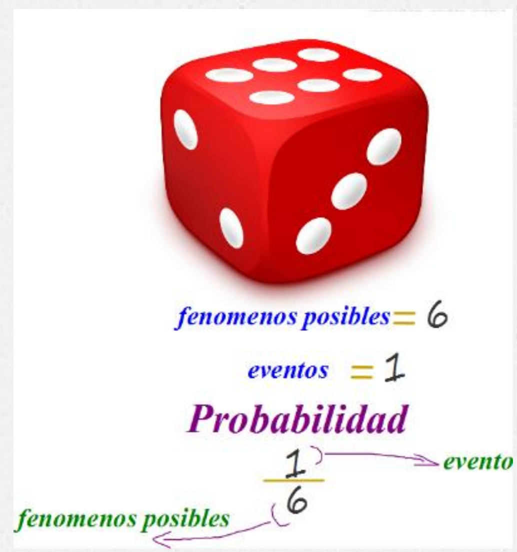
La probabilidad se encarga de evaluar todas aquellas actividades en donde se tiene incertidumbre acerca de los resultados que se pueden esperar, esto quiere decir que la probabilidad está presente en casi en todas las actividades que se pretenda realizar.



Definición:

- *La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muéstrales de A. Por lo tanto,*
- La probabilidad de un evento varía entre 0 y 1; a cada uno de los elementos del espacio muestral se le asigna una probabilidad de manera que la suma de todas las probabilidades sea 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad P(\varnothing) = 0 \ \text{ y } \ P(S) = 1$$



Ejemplo:

Una Moneda se lanza dos veces al aire.

¿Cuál es la probabilidad de que caiga cuando menos una cara?

***Solución*:** El espacio muestral para este experimento es:

$S = \{CC, CS, SC, SS\}$

$$1p+1p+1p+1p = 1$$

$$4p = 1$$

$$P = \frac{1}{4}$$

E: Lanzar dos monedas.

S={CC,CS,SC,SS}

C: Cara

S: Sello

Si A represente el evento de que ocurra cuando menos una cara entonces:

$A = \{CC, CS, SC\}$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Teorema:

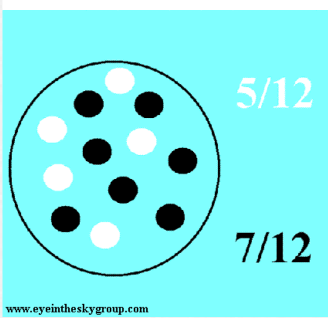
- *Si un experimento puede tener cualquiera de N resultados diferentes igualmente probables y si exactamente n de estos resultados corresponde al evento A, entonces la probabilidad del evento A es:*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Ejemplo:

Si una urna contiene 10 esferas blancas,
15 azules y 5 rojas,
La probabilidad de extraer al azar una esfera blanca, es:

Solución: $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$



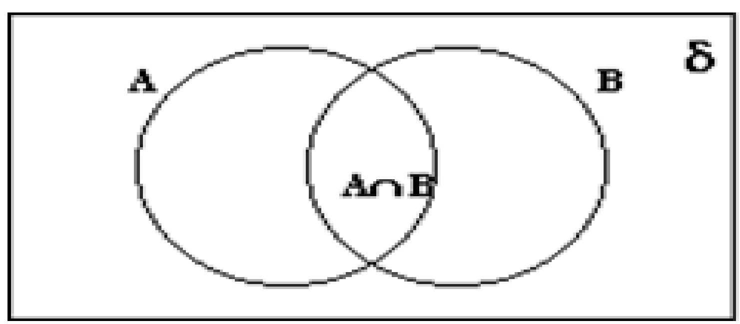
Reglas Aditivas

Teorema 1:

Si A y B son dos eventos cualquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración:



Ejemplo:

La probabilidad de que Paula apruebe matemáticas es de 2/3 y la probabilidad de que apruebe ingles es de 4/9. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es de 1/4 ¿Cuál es la probabilidad de que Paula apruebe al menos uno de ellos?

Solución: Si M es el evento de aprobar matemáticas y E el evento de aprobar Ingles, entonces por la regla aditiva se tiene:

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

Reglas Aditivas

Teorema 2:

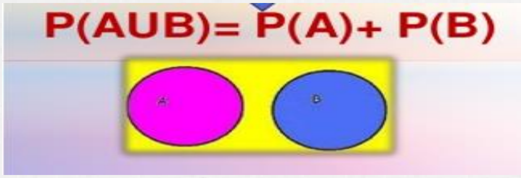
Si A y B son mutuamente excluyentes (no hay intersección), entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ya que si A y B son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \varnothing$ ***entonces,*** $P(A \cap B) = 0$

Si A1, A2 , A3, … An son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$



Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados?

Solución: Sea A el evento de que ocurra un 7, y B el evento de que ocurra un 11. El 7 resulta en 6 de los 36 puntos muéstrales y el 11, en solo 2 de ellos.

$$P(7) = (5,2);(2,5);(3,4);(4,3);(6,1);(1,6) \Rightarrow P(7) = \frac{6}{36}$$

$$P(11) = (5,6);(6,5) \Rightarrow P(11) = \frac{2}{36}$$

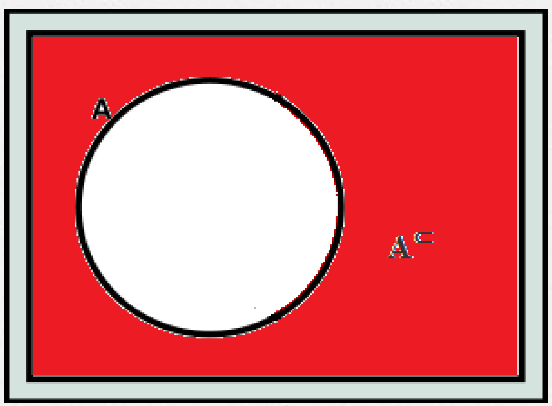
$$P(7) + P(11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

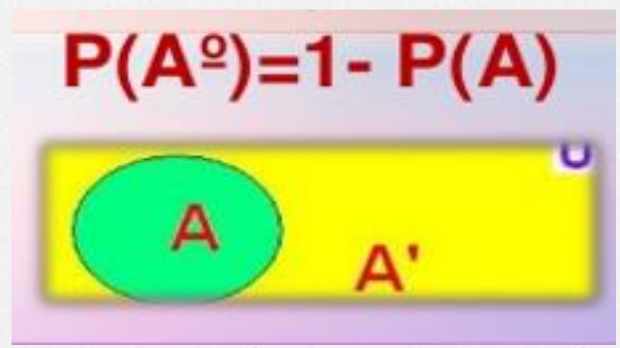
Reglas Aditivas

Teorema 3:

Si A es un evento cualquiera de un experimento aleatorio y A' es el complemento de A, entonces:

$P(A) + P(A') = 1$ ó $P(A') = 1 - P(A)$





Reglas Multiplicativas

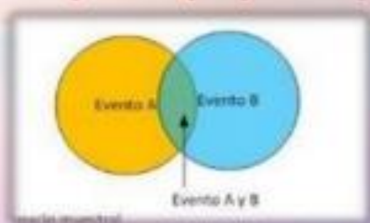
EVENTOS INDEPENDIENTES Y EVENTOS DEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes cuando la ausencia o presencia de A es independiente de la presencia o ausencia de B

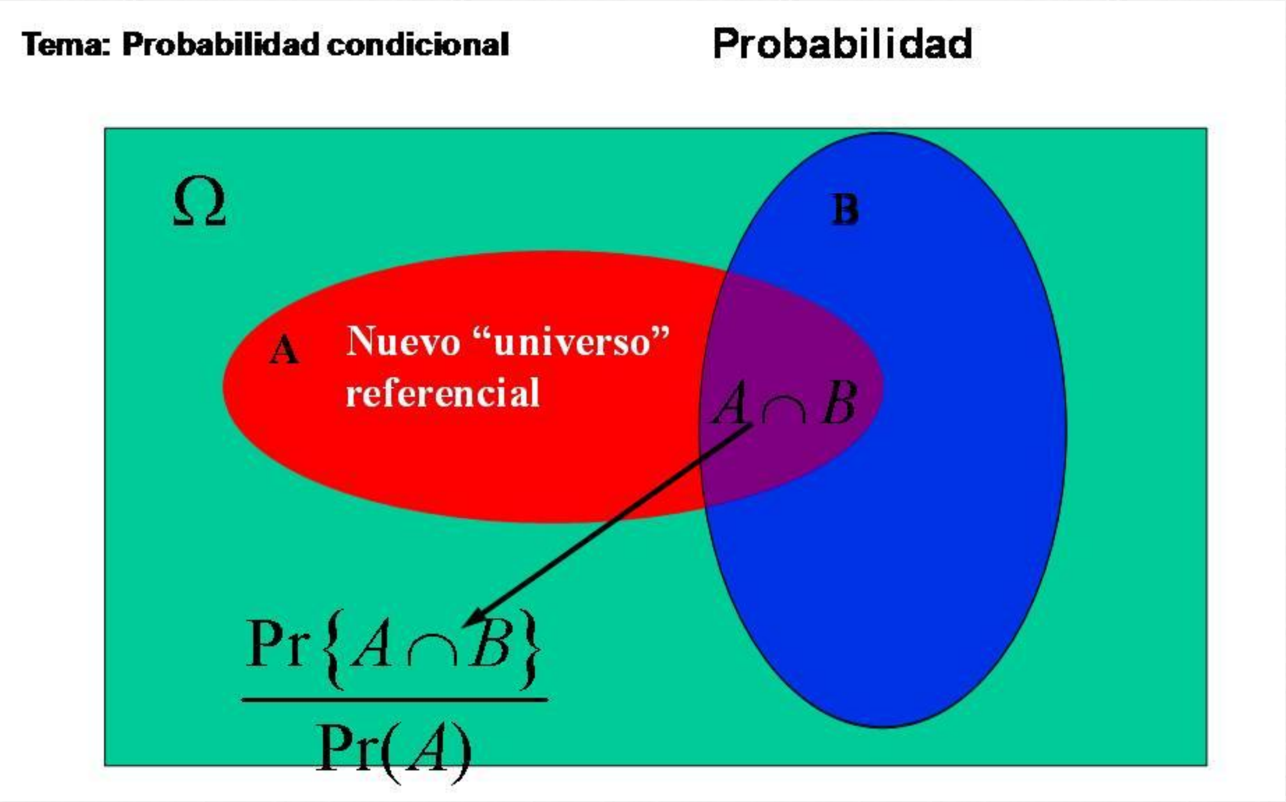
$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

Dos o mas eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o presencia de A es requisito para la presencia u ocurrencia de B

$$P(A \cap B) = P(A).\ P\ (B/A)$$



Probabilidad Condicional

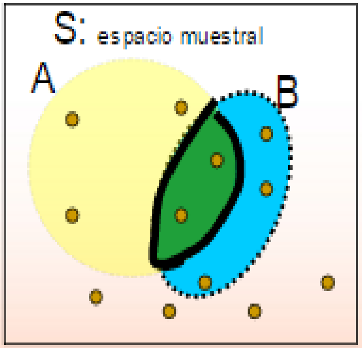


Concepto

La *probabilidad condicional* que ocurra un evento ***A***, dado que ha sucedido un evento ***B***, puede ser calculada con:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{con} \quad P(B) \neq 0$$

"La probabilidad de un evento dado que otro evento ha ocurrido, es igual a la **probabilidad de la intersección** de ambos eventos entre la **probabilidad del evento que ha ocurrido** ". Con la restricción de que la probabilidad del evento que ha ocurrido debe ser diferente de cero.



La probabilidad condicional es una **probabilidad a posteriori** , esto es, se obtiene a la luz de nueva información.

Ejemplo:

Se tiene la siguiente información:

Genero	Cabello Liso	Cabello Rizado	Total
Hombre	25	6	31
Mujer	15	4	19
Total	**40**	**10**	**50**

Cuál es la probabilidad de escoger una mujer dado que tiene el cabello rizado?

Definiendo los siguientes eventos: **M :** la elegida es mujer

R : la elegida tiene el cabello rizado

Forma 1	**Forma 2**
$P(M / R) = \frac{4}{10}$	Usando la expresión que define la probabilidad condicional: $P(M / R) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)}$ Si $(R \cap M) = 4$ entonces $P(R \cap M) = \frac{4}{50}$ además $P(R) = \frac{10}{50}$ entonces: $P(M / R) = \frac{4/50}{10/50} = \frac{4}{10}$

Regla de la Multiplicación:

- **Eventos Dependientes:** Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro (o otros).

Al despejar $P(A \cap B)$ de la formula

$$P\left(B/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se obtiene la fórmula que permite calcular la probabilidad de que ocurran dos eventos.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B / A) \quad \text{o}$$

$$P(B \cap A) = P(A) * P(B / A)$$

Regla de la Multiplicación:

Ejemplo Evento Dependiente: Una bolsa contiene 7 bolas blancas y 4 negras, y una segunda bolsa contiene 5 bolas blancas y 8 negras. Se extrae una bola de la primera bolsa, sin verla, y se coloca en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda bolsa sea blanca?

1.

7B
4N

$P(B_1)=\frac{7}{11}$

5B
8N
1B

$P(B_2/B_1)=\frac{6}{14}$

$P(N_2/B_1)=\frac{8}{14}$

$P(N_1)=\frac{4}{11}$

5B
8N
1N

$P(B_2/N_1)=\frac{5}{14}$

$P(N_2/N_1)=\frac{9}{14}$

$$= P(B_2 \cap B_1) \cup P(B_2 \cap N_1)$$

$$= P(B_1) * P(B_2/B_1) + P(N_1) * P(B_2/N_1)$$

$$\left(\frac{7}{11} * \frac{6}{14}\right) + \left(\frac{4}{11} * \frac{5}{14}\right) = \frac{31}{77} = 0.4026$$

Regla de la Multiplicación:

Eventos Independientes: son independientes entre sí cuando la probabilidad de que ocurra uno no es influida por la ocurrencia de otro.

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ *Ejemplo:*

Se lanza ***dos veces*** un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener totales de 7 y 11?

<table>
<tr><td colspan="3">Para que caigan totales de 7 y 11 en dos lanzamientos de un par de dados tiene que pasar los siguiente:</td></tr>
<tr><td>Que caiga 7 en el primer lanzamiento</td><td>Y</td><td>Que caiga 11 en el segundo lanzamiento</td></tr>
<tr><td colspan="3">O Que</td></tr>
<tr><td>Que caiga 11 en el primer lanzamiento</td><td>Y</td><td>Que caiga 7 en el segundo lanzamiento</td></tr>
<tr><td colspan="3">

$$P\{7_{1\ Lanz} \cap 11_{2\ Lanz}\} \quad \cup \quad P\{11_{1\ Lanz} \cap 7_{2\ Lanz}\}$$

$$\{P(7)_{1\ Lanz} * P(11)_{2\ Lanz}\} \quad + \quad \{P(11)_{1\ Lanz} * P(7)_{2\ Lanz}\}$$

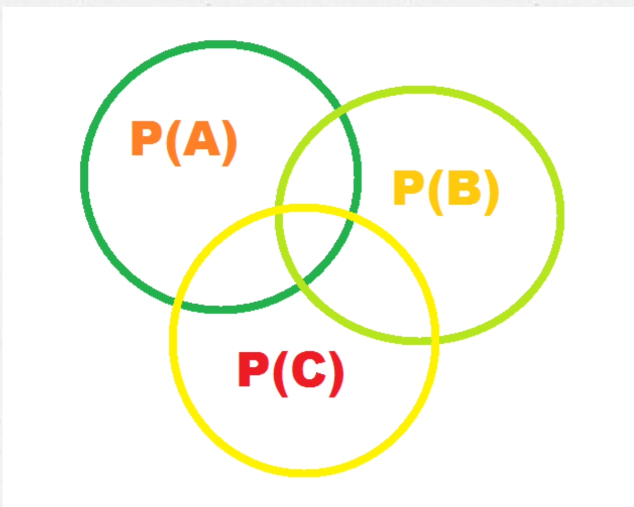
$$\left\{\frac{6}{36}*\frac{2}{36}\right\}+\left\{\frac{2}{36}*\frac{6}{36}\right\}=\frac{1}{54}=0.01851$$

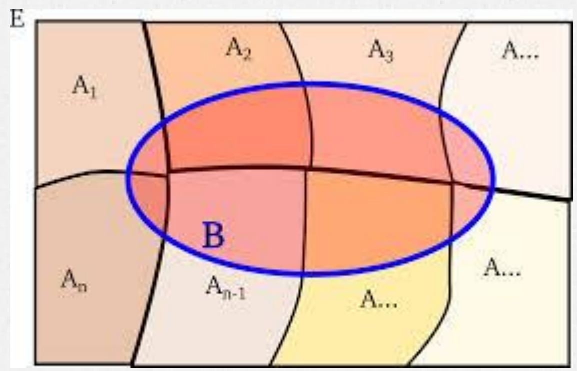
</td></tr>
</table>

Regla de Bayes

Concepto

- La Regla de Bayes es un procedimiento que se utiliza para encontrar probabilidades posteriores, a partir de probabilidades previas.
- Esto es, si el evento B ha ocurrido, ¿Cuál es la probabilidad que fuera generado por el evento A1 (que es una causa posible) o por el A2 (otra causa posible)?





Regla de Bayes

- Describe las alternativas para calcular la probabilidad de que sucedan eventos, usando la probabilidad condicional.
- Permite alcanzar un juicio racional a partir de datos incompletos, que a menudo constituyen la única información disponible cuando se presentan situaciones imprevistas.
- Es valida en todas las aplicaciones de la teoría de la probabilidad por su predicción exacta.

Formula:

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i)\,P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{B}{A_2}\right) + \cdots + P(A_n)P\left(\frac{B}{An}\right)}$$

Es decir:

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i)\,P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{\sum P(A_i)\,P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

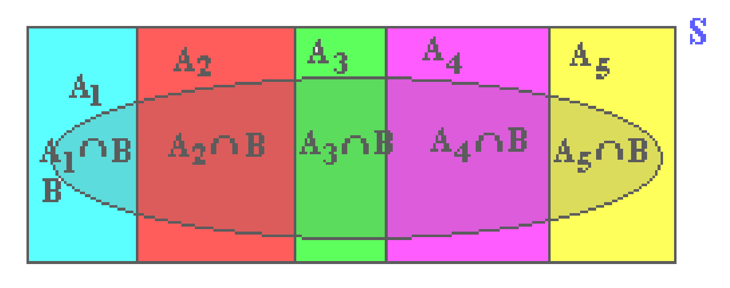
Donde:

$P(Ai) = \Pr obabilidad\ a\ priori$

$P(B / Ai) = \Pr obabilidad\ condicional$

$\sum P(Ai)\,P(B / Ai) = \Pr obabilidad\ total$

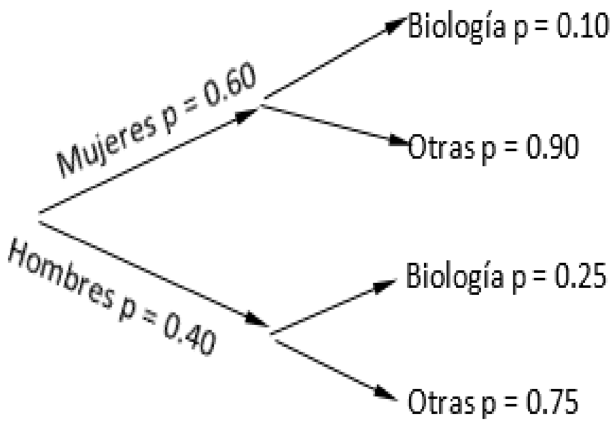
$P(Ai / B) \Pr obabilidad\ a\ posteriori$



Ejemplo:

En un Instituto Superior, el 25 por ciento de los hombres y el 10 por ciento de las mujeres estudian Biología. Las mujeres constituyen el 60 por ciento del estudiantado. Si se selecciona en forma aleatoria un estudiante y resulta que está cursando Biología, determinar la probabilidad de que sea mujer.

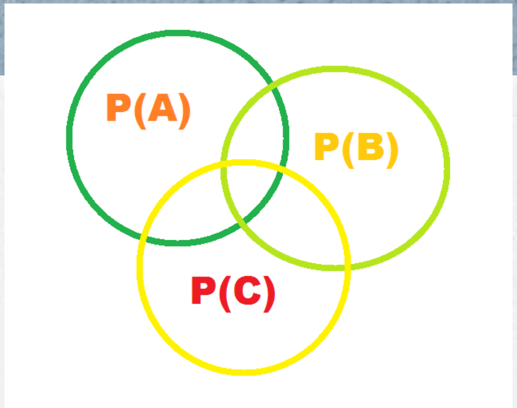
Solución:



$$P(H) = 0.40;\ P(M) = 0.60;\ P(B/H) = 0.25;\ P(B/M) = 0.10$$

$$P\left(M/B\right) = \frac{(0.6)(0.1)}{(0.4)(0.25) + (0.6)(0.1)} = 0.375$$

Ejemplo 2:

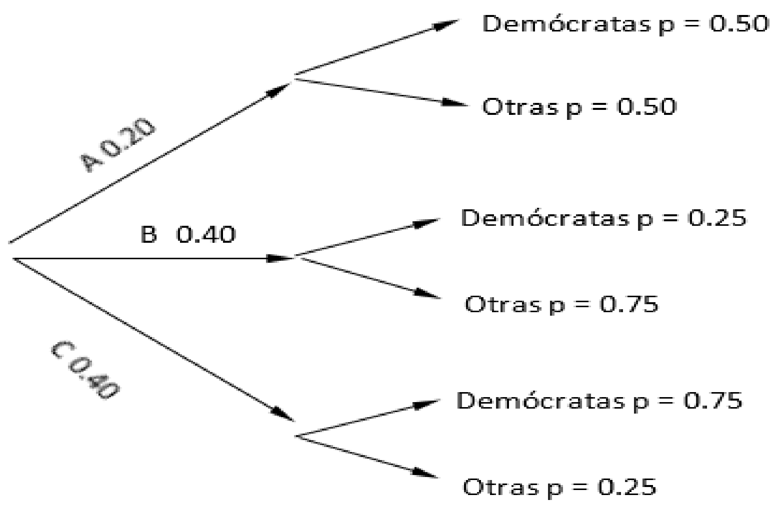


Una ciudad es dividida en distritos A, B, C con el 20%, el 40% y el 40% de los votantes registrados respectivamente. Los votantes registrados que aparecen como demócratas son el 50% en A, el 25% en B y el 75% en C. Se escoge un votante registrado aleatoriamente de la ciudad.

a) Encuentre la probabilidad de que el votante esté inscrito como demócrata. Rta: 0,5 ó 50%

b) Si el votante registrado está inscrito como demócrata, encuentre la probabilidad de que el votante sea del distrito B. Rta: 0,2 ó 20%

Solución:



$$P(A)=0.20 \qquad P(D/A)=0.50$$
$$P(B)=0.40 \qquad P(D/B)=0.25$$
$$P(C)=0.40 \qquad P(D/C)=0.75$$

a.

$$P(D)=P(A)*P(D/A)+P(B)*P(D/B)+P(C)*P(D/C)$$
$$P(D)=0.20*0.50+0.40*0.25+0.40*0.75$$
$$P(D)=0.50$$

b. $$P(B/D)=\frac{P(B)*P(D/B)}{P(A)*P(D/A)+P(B)*P(D/B)+P(C)*P(D/C)}$$

$$P(B/D)=\frac{0.40*0.25}{0.20*0.50+0.40*0.25+0.40*0.75}=0.2$$