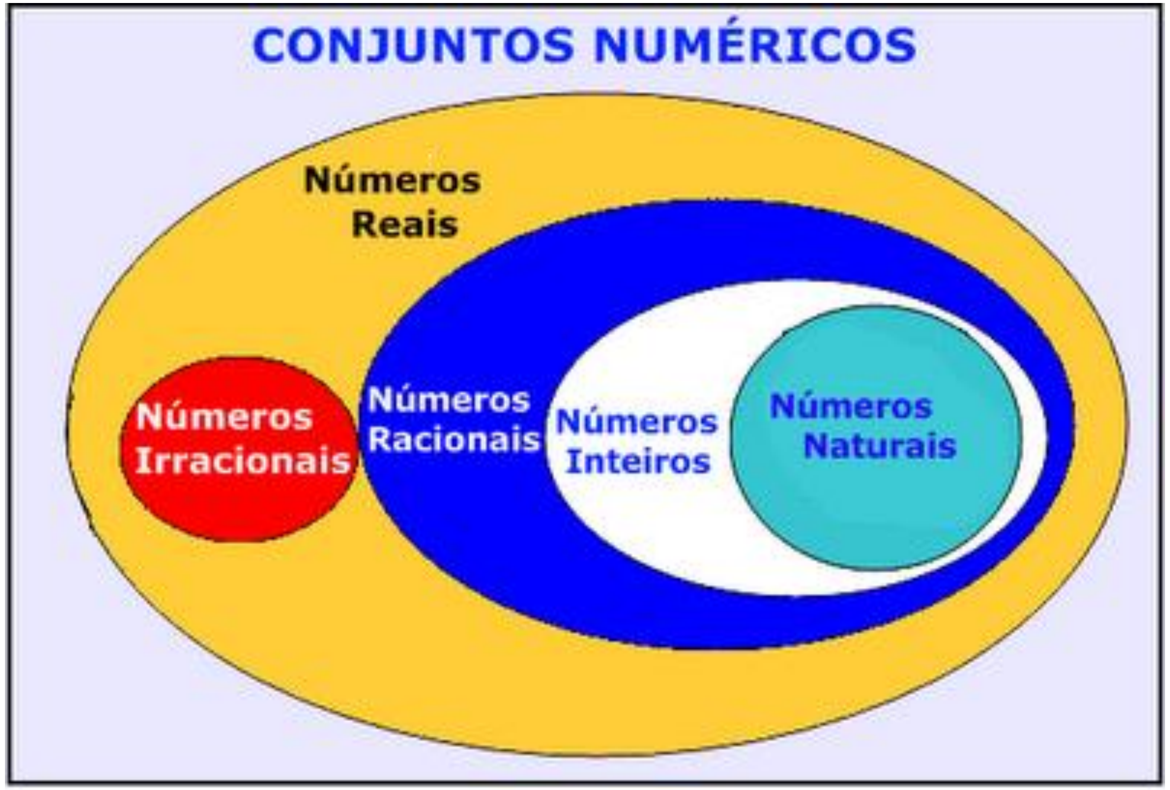
Conjuntos Numéricos



Ing. Idialy Montoya Aguilar

Esp. Docencia Universitaria

Mg. Educación

NÚMEROS REALES

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales.** Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

NÚMEROS REALES $\mathbb{R}$

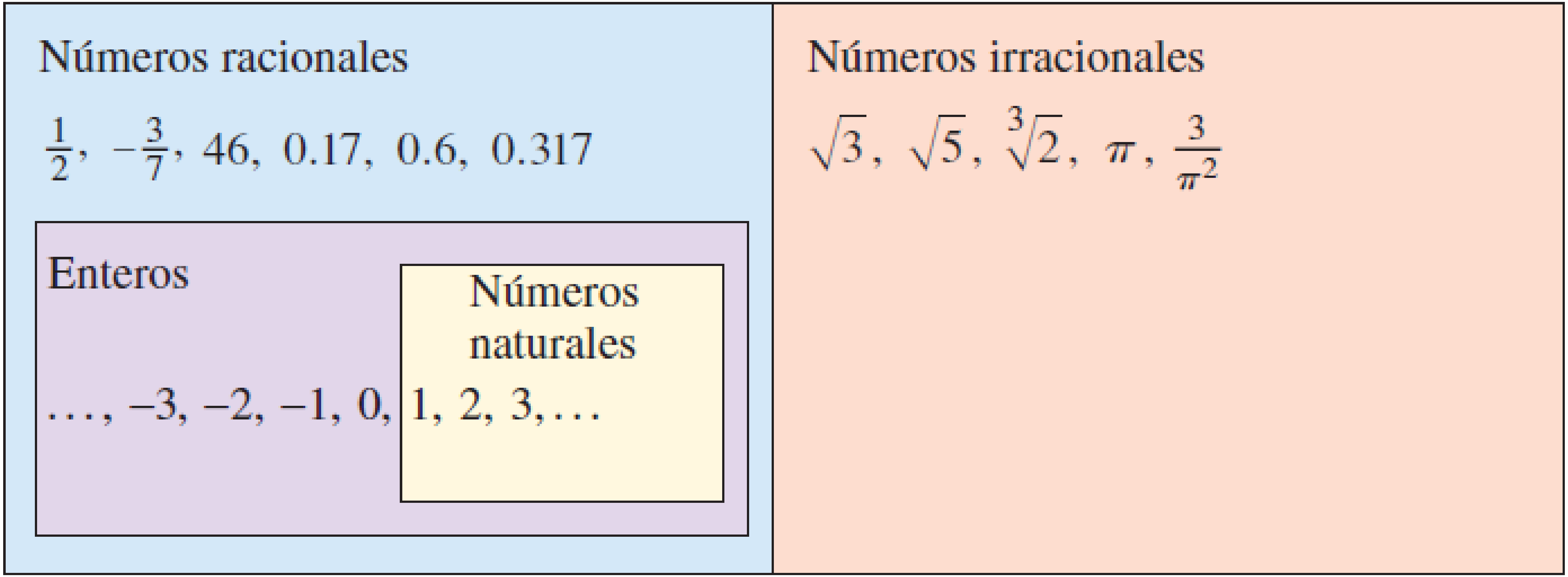


FIGURA 1 El sistema de números reales

Números reales $\mathbb{R}$

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondiente decimal es periódico.

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

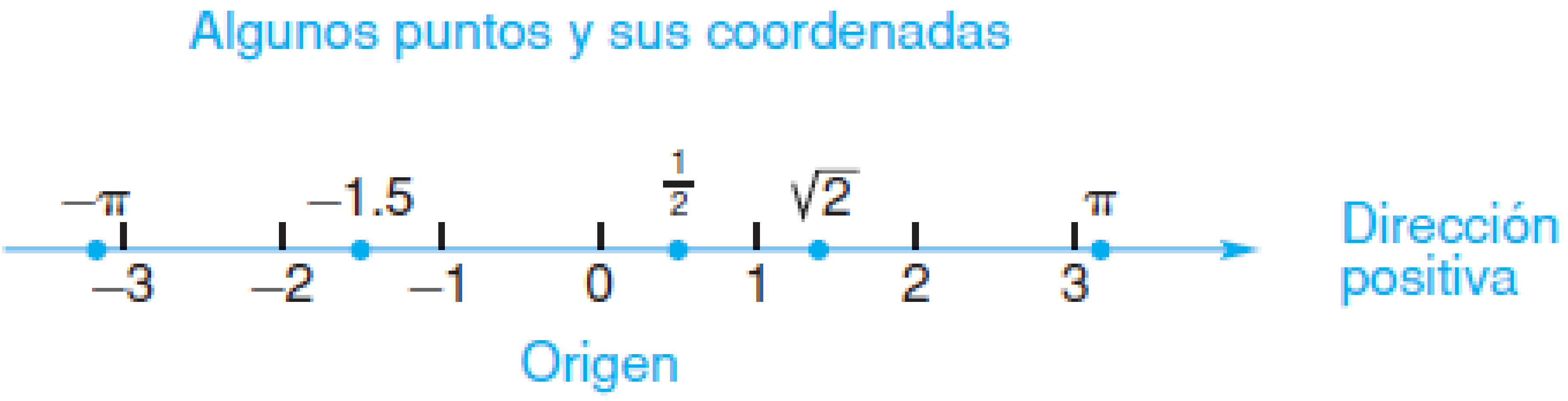


FIGURA 0.1 La recta de los números reales.

A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón decimos que hay una *correspondencia uno a uno* entre los puntos de la recta y los números reales. Llamamos a esta recta la **recta de coordenadas** o **recta de números reales.** Tenemos la libertad para tratar a los números reales como puntos sobre dicha recta y viceversa.

Algunas propiedades de los números reales

1. Propiedad transitiva de la igualdad

$$\text{Si } a = b \text{ y } b = c, \text{ entonces } a = c.$$

Por tanto, dos números que sean iguales a un tercer número son iguales entre sí. Por ejemplo, si $x = y$ y $y = 7$, entonces $x = 7$.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

4. Propiedades del inverso

Para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$ tal que,

$$a + (-a) = 0.$$

El número $-a$ es llamado el **inverso aditivo** o **negativo** de a.

Por ejemplo, ya que $6 + (-6) = 0$, el inverso aditivo de 6 es -6. El inverso aditivo de un número no necesariamente es un número negativo. Por ejemplo, el inverso aditivo de -6 es 6, ya que $(-6) + (6) = 0$. Esto es, el negativo de -6 es 6, de modo que podemos escribir $-(-6) = 6$.

Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1} tal que,

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

El número a^{-1} se conoce como el **inverso multiplicativo** de a.

Por tanto, todos los números, con excepción del cero, tienen un inverso multiplicativo. Como se recordará, a^{-1} puede escribirse como $\frac{1}{a}$ y también se llama el *recíproco* de a. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$, ya que $3(\frac{1}{3}) = 1$. Por lo que $\frac{1}{3}$ es el recíproco de 3. El recíproco de $\frac{1}{3}$ es 3, ya que $(\frac{1}{3})(3) = 1$. **El recíproco de 0 no está definido.**

▼ Adición y sustracción

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

EJEMPLO

Sea x, y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$

$$= -x - y + z$$

Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** entre a y b o como la **fracción** de a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \dfrac{10}{21}$	Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores.
2. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$	$\dfrac{2}{3} \div \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7}{5} = \dfrac{14}{15}$	Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor.
3. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a + b}{c}$	$\dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{5} = \dfrac{2 + 7}{5} = \dfrac{9}{5}$	Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**.
4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$	$\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} = \dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \dfrac{29}{35}$	Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores.
5. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$	$\dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \dfrac{2}{3}$	**Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador.
6. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada.**

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **Mínimo Común Denominador** (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\dfrac{5}{36} + \dfrac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

Operaciones con números reales

Propiedad	*Ejemplo(s)*
1. $a - b = a + (-b)$.	$2 - 7 = 2 + (-7) = -5$.
2. $a - (-b) = a + b$.	$2 - (-7) = 2 + 7 = 9$.
3. $-a = (-1)(a)$.	$-7 = (-1)(7)$.
4. $a(b + c) = ab + ac$.	$6(7 + 2) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 2 = 54$.
5. $a(b - c) = ab - ac$.	$6(7 - 2) = 6 \cdot 7 - 6 \cdot 2 = 30$.
6. $-(a + b) = -a - b$.	$-(7 + 2) = -7 - 2 = -9$.
7. $-(a - b) = -a + b$.	$-(2 - 7) = -2 + 7 = 5$.
8. $-(-a) = a$.	$-(-2) = 2$.
9. $a(0) = 0$.	$2(0) = 0$.
10. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$.	$(-2)(7) = -(2 \cdot 7) = 2(-7) = -14$.

11. $(-a)(-b) = ab.$ $\qquad (-2)(-7) = 2 \cdot 7 = 14.$

12. $\dfrac{a}{1} = a.$ $\qquad \dfrac{7}{1} = 7, \dfrac{-2}{1} = -2.$

13. $\dfrac{a}{b} = a\left(\dfrac{1}{b}\right).$ $\qquad \dfrac{2}{7} = 2\left(\dfrac{1}{7}\right).$

14. $\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}.$ $\qquad \dfrac{2}{-7} = -\dfrac{2}{7} = \dfrac{-2}{7}.$

15. $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}.$ $\qquad \dfrac{-2}{-7} = \dfrac{2}{7}.$

16. $\dfrac{0}{a} = 0$ cuando $a \neq 0.$ $\qquad \dfrac{0}{7} = 0.$

17. $\dfrac{a}{a} = 1$ cuando $a \neq 0.$ $\qquad \dfrac{2}{2} = 1, \dfrac{-5}{-5} = 1.$

18. $a\left(\dfrac{b}{a}\right) = b.$ $\qquad 2\left(\dfrac{7}{2}\right) = 7.$

19. $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ cuando $a \neq 0$. $\qquad 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1.$

20. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}.$ $\qquad \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}.$

21. $\dfrac{ab}{c} = \left(\dfrac{a}{c}\right)b = a\left(\dfrac{b}{c}\right).$ $\qquad \dfrac{2 \cdot 7}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot 7 = 2 \cdot \dfrac{7}{3}.$

22. $\dfrac{a}{bc} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c}\right) = \left(\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{a}{c}\right).$ $\qquad \dfrac{2}{3 \cdot 7} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{7}.$

23. $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{c}\right) = \dfrac{ac}{bc}$ $\qquad \dfrac{2}{7} = \left(\dfrac{2}{7}\right)\left(\dfrac{5}{5}\right) = \dfrac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5}.$

cuando $c \neq 0$.

24. $\dfrac{a}{b(-c)} = \dfrac{a}{(-b)(c)} = \dfrac{-a}{bc} =$ $\qquad \dfrac{2}{3(-5)} = \dfrac{2}{(-3)(5)} = \dfrac{-2}{3(5)} =$

$\dfrac{-a}{(-b)(-c)} = -\dfrac{a}{bc}.$ $\qquad \dfrac{-2}{(-3)(-5)} = -\dfrac{2}{3(5)} = -\dfrac{2}{15}.$

25. $\dfrac{a(-b)}{c} = \dfrac{(-a)b}{c} = \dfrac{ab}{-c} = \dfrac{(-a)(-b)}{-c} = -\dfrac{ab}{c}.$ $\qquad$ $\dfrac{2(-3)}{5} = \dfrac{(-2)(3)}{5} = \dfrac{2(3)}{-5} = \dfrac{(-2)(-3)}{-5} = -\dfrac{2(3)}{5} = -\dfrac{6}{5}.$

26. $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}.$ $\qquad$ $\dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{9} = \dfrac{2+3}{9} = \dfrac{5}{9}.$

27. $\dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = \dfrac{a-b}{c}.$ $\qquad$ $\dfrac{2}{9} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{2-3}{9} = \dfrac{-1}{9}.$

28. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}.$ $\qquad$ $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{22}{15}.$

29. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}.$ $\qquad$ $\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{15}.$

30. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}.$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{7}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \dfrac{10}{21}.$

31. $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \dfrac{b}{c} = a \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}.$ $\qquad$ $\dfrac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \div \dfrac{3}{5} = 2 \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{2 \cdot 5}{3} = \dfrac{10}{3}.$

32. $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \div c = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}.$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{2}{3} \div 5 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{3 \cdot 5} = \dfrac{2}{15}.$

Ejercicio 0.2

En los problemas del 1 al 12, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos. Si es falso, dé una razón.

1. -7 es un entero.

2. $\frac{1}{6}$ es racional.

3. -3 es un número natural.

4. 0 no es racional.

5. 5 es racional.

6. $\frac{7}{0}$ es un número racional.

7. $\sqrt{25}$ no es un entero positivo.

8. π es un número real.

9. $\frac{0}{6}$ es racional.

10. $\sqrt{3}$ es un número natural.

11. -3 está a la derecha de -4 en la recta de los números reales.

12. Todo entero es positivo o negativo.

Ejercicio 0.3

En los problemas del 1 al 10, clasifique los enunciados como verdaderos o falsos.

1. Todo número real tiene un recíproco.

2. El recíproco de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

3. El inverso aditivo de 5 es $\frac{1}{5}$.

4. $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3)(2 \cdot 4)$.

5. $-x + y = -y + x$.

6. $(x + 2)(4) = 4x + 8$.

7. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x}{2} + 1$.

8. $3\left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{3x}{4}$.

9. $x + (y + 5) = (x + y) + (x + 5)$.

10. $8(9x) = 72x$.

En los problemas del 11 al 20, establezca cuál propiedad de los números reales se usa.

11. $2(x + y) = 2x + 2y$.

12. $(x + 5) + y = y + (x + 5)$.

13. $2(3y) = (2 \cdot 3)y$.

14. $\frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{1}{7}$.

15. $2(x - y) = (x - y)(2)$.

16. $y + (x + y) = (y + x) + y$.

17. $8 - y = 8 + (-y)$.

18. $5(4 + 7) = 5(7 + 4)$.

19. $(8 + a)b = 8b + ab$.

20. $(-1)[-3 + 4] = (-1)(-3) + (-1)(4)$.

Ejercicio 0.4

Simplifique, si es posible, cada una de las siguientes expresiones.

1. $-2 + (-4)$.

2. $-6 + 2$.

3. $6 + (-4)$.

4. $7 - 2$.

5. $7 - (-4)$.

6. $-6 - (-11)$.

7. $-8 - (-6)$.

8. $(-2)(9)$.

9. $7(-9)$.

10. $(-2)(-12)$.

11. $(-1)6$.

12. $-(-9)$.

13. $-(-6 + x)$.

14. $-7(x)$.

15. $-12(x - y)$.

16. $-[-6 + (-y)]$.

17. $-3 \div 15$.

18. $-2 \div (-4)$.

19. $4 \div (-2)$.

20. $2(-6 + 2)$.

21. $3[-2(3) + 6(2)]$.

22. $(-2)(-4)(-1)$.

23. $(-8)(-8)$.

24. $x(0)$.

25. $3(x - 4)$.

26. $4(5 + x)$.

27. $-(x - 2)$.

28. $0(-x)$.

29. $8\left(\frac{1}{11}\right)$.

30. $\frac{7}{1}$.

31. $\frac{-5x}{7y}$.

32. $\frac{3}{-2x}$.

33. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$.

34. $\frac{a}{c}(3b)$.

35. $(2x)\left(\frac{3}{2x}\right)$.

36. $\frac{-18y}{-3x}$.

37. $\frac{7}{y} \cdot \frac{1}{x}$.

38. $\frac{2}{x} \cdot \frac{5}{y}$.

39. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

40. $\frac{5}{12} + \frac{3}{4}$.

41. $\frac{3}{10} - \frac{7}{15}$.

42. $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$.

43. $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$.

44. $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

45. $\frac{2}{5} - \frac{3}{8}$.

46. $\dfrac{6}{\frac{x}{y}}$.

47. $\dfrac{\frac{k}{9}}{n}$.

48. $\dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{7}{10}}$.

49. $\frac{7}{0}$.

50. $\frac{0}{7}$.

51. $\frac{0}{0}$.

52. $0 \cdot 0$.

Bibliografía

- Heaussler, E., y Paul, R. (2003) Matemáticas para Administración y Economía. Decima edición. México: Pearson Educación.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning Editores S.A.