Expresiones Algebraicas

Racionales

$$3x^3 - \frac{1}{2}xy + \frac{5a}{b^3}$$

Enteras

$$2xy - \frac{2}{5}x^2y + 5x^3$$

Fraccionarias

$$ab - \frac{2a^2}{5c} + 6bc^{-3}$$

Irracionales

$$\sqrt{6xy} - 4xy^{\frac{1}{3}}$$

Ing. Idialy Montoya Aguilar

Esp. Docencia Universitaria

Mg. Educación

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Cuando se combinan números, representados por símbolos, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, entonces la expresión resultante se llama *expresión algebraica*.

EJEMPLO 1 Expresiones algebraicas

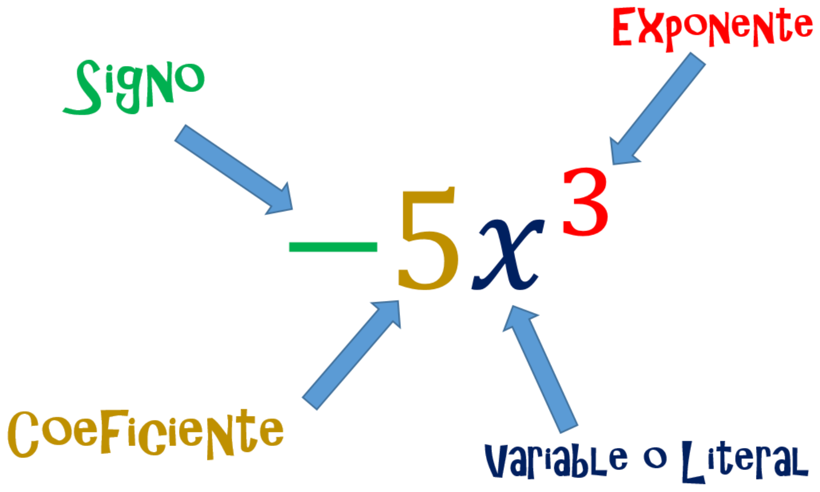
a. $\sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x - 2}{10 - x}}$ es una expresión algebraica en la variable x.

b. $10 - 3\sqrt{y} + \dfrac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c. $\dfrac{(x + y)^3 - xy}{y} + 2$ es una expresión algebraica en las variables x y y.

Término

Son expresiones algebraicas que consta de un número y una o varias variables combinados mediante la multiplicación y la división y puede ser positivo (+) o negativo (-)



La siguiente expresión algebraica tiene cinco términos:

$$\frac{3}{4} + x^3 - 5xy^2 - 6x^2y + 7x^y$$

Constante

Cantidad que se mantiene fija.
Ejemplo: 5, 20, -4, …, etc

El **grado** para un término que presenta una sola variable (una sola letra), corresponde al exponente de la variable.

Ejemplo:

Para $-5x^3$: El coeficiente es -5, y el grado es 3.

x^4 : El coeficiente es 1, y el grado es 4.

$2y^3$: El coeficiente es 2, y el grado es 3.

Cuando el termino tiene dos o mas variables (letras), podemos hablar de un ***grado relativo*** con relación a una variable, correspondiente al exponente de esa variable, y el ***grado absoluto***, corresponde a la suma de los exponentes de las variables del termino.

Ejemplo:

Para el término:

$2x^3y\sqrt[3]{z}$: El coeficiente es 2, el grado con relación a la variable de x es 3, el grado con relación a la variable y es 1, el grado con relación a la variable z es de $\frac{1}{3}$, el grado absoluto del término es: la suma de los exponentes

$$= 3+1+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$$

Las expresiones algebraicas que tienen exactamente ***un término*** se denominan ***monomios*.**

GRADO: 9

$$\underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{COEFICIENTE}}\underbrace{x^{4}y^{5}}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

Aquéllas que tienen exactamente ***dos términos*** son ***binomios***

$$2x+5z$$

$$\frac{1}{4}-x^{4}$$

Y las que tienen exactamente ***tres términos*** son ***trinomios*.**

$$1-5x+4x^{2}$$

$$\frac{1}{4}+2x-\sqrt[3]{5y}$$

Polinomios: Son expresiones algebraicas que tienen dos o más términos.

$$a_0+a_1x+a_2x^{2}+a_3x^{3}\dots+a_nx^{n}$$

Grado absoluto de un polinomio (mayor grado absoluto de los términos)

$$\underbrace{8x^7y^3}_{GA = 10} - \underbrace{3x^4y^4}_{GA = 8} + \underbrace{6xy^2}_{GA = 3}$$

$$GA = 10$$

$$\underbrace{\overset{\text{4° grado}}{x^4} - \overset{\text{3ergrado}}{5x^3} + \overset{\text{2° grado}}{x^2} - \overset{\text{1er grado}}{3x}}_{\text{Polinomio de 4° grado}}$$

Términos Semejantes

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la **misma parte literal**, o sea, cuando tienen iguales letras afectadas de **iguales exponentes**.

Términos Semejantes

$3a^2$	$4a^2$
$4a^2b$	$5a^2b$
$3a^{m+1}$	$4a^{m+1}$
$3a^m$	$8a^m$

Literal y exponentes son iguales

No son Términos Semejantes

$3a^2b$	$4ab^2$
$-4a^3b^2c^4$	$-b\,a^4b^3c^4$

Literal y exponentes no son iguales

Reducción de términos semejantes

- Reducir términos semejantes implica sumar o restar los coeficientes, para obtener un solo término con el mismo factor literal.
- Ejemplos:

$$1)\ 4ax^2 + 2ax^2 - ax^2 = (4+2-1)\,ax^2 = 5ax^2$$

$$2)\ 3x^5y - 2x^5y - 5x^5y = (3-2-5)\,x^2y = -4x^5y$$

a) $-6\ a^2bc + 15a^2bc = (-6 + 15)\ a^2bc = 9\ a^2bc$

c)

$$\frac{3}{4}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{1}{3}x^3y^2 = \frac{13}{12}x^3y^2 + \frac{1}{6}x^2y^3$$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

▶▶ A. Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

a) La suma de monomios semejantes es inmediata. Así: $4x^3 - 3x^3 + 6x^3 = (4 - 3 + 6)x^3 = 7x^3$

b) Para sumar polinomios hay que agrupar los monomios semejantes. Así:

$$(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) =$$
$$= 4x^3 + 5x - 6 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6x^3 + 4x^2 - x + 5 =$$
$$= (4x^3 - 3x^3 + 6x^3) + (2x^2 + 4x^2) + (5x - 7x - x) + (-6 + 5) =$$
$$= 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{rl} + & 3x - 4xy + 7x^2y + 5xy^2 \\ & -8x - 2xy - 6x^2y + 9\,xy^2 \\ \hline & -5x - 6xy + x^2y + 14\,xy^2 \end{array}$$

B. Multiplicación de polinomios

Se utiliza la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación. Por ejemplo:

a) $3 \cdot (4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18$

b) $(2x^2 + 5x - 6) \cdot (3x^2 - 2x + 3) = 6x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 15x^3 - 10x^2 + 15x - 18x^2 + 12x - 18$
$= 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$

c) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right) \cdot \left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{5}x^4 + \frac{6}{12}x^2 + 6x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

Encuentre el producto $(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1)$.

Solución: tratamos a $2t - 3$ como un solo número y aplicamos la propiedad distributiva dos veces:

$$\begin{aligned}(2t - 3)(5t^2 + 3t - 1) &= (2t - 3)5t^2 + (2t - 3)3t - (2t - 3)1 \\ &= 10t^3 - 15t^2 + 6t^2 - 9t - 2t + 3 \\ &= 10t^3 - 9t^2 - 11t + 3.\end{aligned}$$

Productos Notables

Productos especiales

1. $x(y + z) = xy + xz$ (propiedad distributiva).
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$
3. $(ax + c)(bx + d) = abx^2 + (ad + cb)x + cd.$
4. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
5. $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ (cuadrado de un binomio).
6. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ (producto de suma y diferencia).
7. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ (cubo de un binomio).
8. $(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ (cubo de un binomio).

EJEMPLO 5 Productos especiales

a. Por la regla 2,

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 5) &= [x + 2][x + (-5)] \\ &= x^2 + (2 - 5)x + 2(-5) \\ &= x^2 - 3x - 10.\end{aligned}$$

b. Por la regla 3,

$$\begin{aligned}(3z + 5)(7z + 4) &= 3 \cdot 7z^2 + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 7)z + 5 \cdot 4 \\ &= 21z^2 + 47z + 20.\end{aligned}$$

c. Por la regla 5,

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= x^2 - 2(4)x + 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16.\end{aligned}$$

d. Por la regla 6,

$$\begin{aligned}(\sqrt{y^2 + 1} + 3)(\sqrt{y^2 + 1} - 3) &= (\sqrt{y^2 + 1})^2 - 3^2 \\ &= (y^2 + 1) - 9 \\ &= y^2 - 8.\end{aligned}$$

e. Por la regla 7,

$$\begin{aligned}(3x + 2)^3 &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(2)^2(3x) + (2)^3 \\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8.\end{aligned}$$

Actividad

Halla: a) $\left(2x-4\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+5\right)$; b) $(x+3)^2-(x-3)^2$; c) $(x-1)\cdot(x^2+2)^2-(1+2x)^2$

R: a) $\frac{1}{2}x^3-2x^2+12x-20$; b) $12x$; c) $x^5-x^4+4x^3-8x^2-5$

▶▶ C. División de monomios

La **división de monomios** se realiza aplicando las leyes de la simplificación de fracciones y de las operaciones con potencias.

a) $\dfrac{12x^3}{2x} = \dfrac{12}{2} \cdot \dfrac{x^3}{x} = 6x^2;$

b) $\dfrac{2x^2}{5x^3} = \dfrac{2}{5x};$

c) $\dfrac{3x^3}{-9x} = -\dfrac{1}{3}x^2$

D. División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio. Esto es una variante de la propiedad distributiva.

Así, por ejemplo:

a) $$\frac{4x^3+x^2-8}{2x}=\frac{4x^3}{2x}+\frac{x^2}{2x}-\frac{8}{2x}=2x^2+\frac{x}{2}-\frac{4}{x}$$

b) $$\frac{x^3-4x^2-x}{2x}=\frac{x(x^2-4x-1)}{2x}=\frac{x^2-4x+1}{2}$$

a. $$\frac{x^3 + 3x}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{3x}{x} = x^2 + 3.$$

b. $$\frac{4z^3 - 8z^2 + 3z - 6}{2z} = \frac{4z^3}{2z} - \frac{8z^2}{2z} + \frac{3z}{2z} - \frac{6}{2z}$$

$$= 2z^2 - 4z + \frac{3}{2} - \frac{3}{z}.$$

▶▶ E. División de polinomios

Para dividir polinomios hay que ordenarlos en grado decreciente.

$$
\begin{array}{rrr|l}
8x^2 & +16x & +6 & 2x+3 \\ \cline{4-4}
-8x^2 & -12x & & 4x+2 \\ \cline{1-2}
 & +4x & +6 & \\
 & -4x & -6 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \;\Big|\; \underline{x^2 + 3x - 2}$$

$$- x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad x^2 - 5x + \frac{6x^2 + 20x}{x^2 + 3x - 2}$$

$$\overline{}$$

$$-5x^3 - 9x^2 + 30x$$

$$5x^3 + 15x^2 - 10x$$

$$\overline{}$$

$$6x^2 + 20x$$

$$\underline{-6x^2 - 20x}$$

$$0$$

Como sabes, en toda división se cumple:

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto} \Leftrightarrow \frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}.$$

En el caso de polinomios podemos escribir:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

▶▶ F. Regla de Ruffini: división de $P(x)$ entre $(x - a)$

La *Regla de Ruffini* permite dividir rápidamente cualquier polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $x - a$.

Para aplicar la regla, los coeficientes del dividendo se colocan ordenados, de mayor a menor grado, incluido el término independiente. Si faltase alguno de ellos, se pone un 0.

La recordamos con un ejemplo.

a) Para dividir $(2x^3 - 3x) : (x - 2)$ se procede así:

Coeficientes del dividendo		2	0	-3	0	
Valor de a en $x - a$	2		4	8	10	
Coeficientes del cociente		2	4	5	10	⟵ Resto

El cociente de la división es: $c(x) = 2x^2 + 4x + 5$. El resto, $r = 10$.

b) Análogamente, para realizar la siguiente división $(x^3 - 2x - 1):(x + 1)$ se disponen los números así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

El cociente de la división es $c(x) = x^2 - x - 1$. El resto, $r = 0$. En este caso, el dividendo es múltiplo del divisor. Esto es: $(x^3 - 2x - 1) = (x + 1)(x^2 - x - 1)$.

También se dice que $(x + 1)$ es un factor de $(x^3 - 2x - 1)$.

Tipo V. Aplicaciones

12> Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadrado en cada esquina y se doblará. Halla, en función del lado x del cuadrado cortado, la función que da el volumen de la caja resultante.

R: En esquema, lo que se pretende hacer es lo que indicamos en la Fig. 3.2.

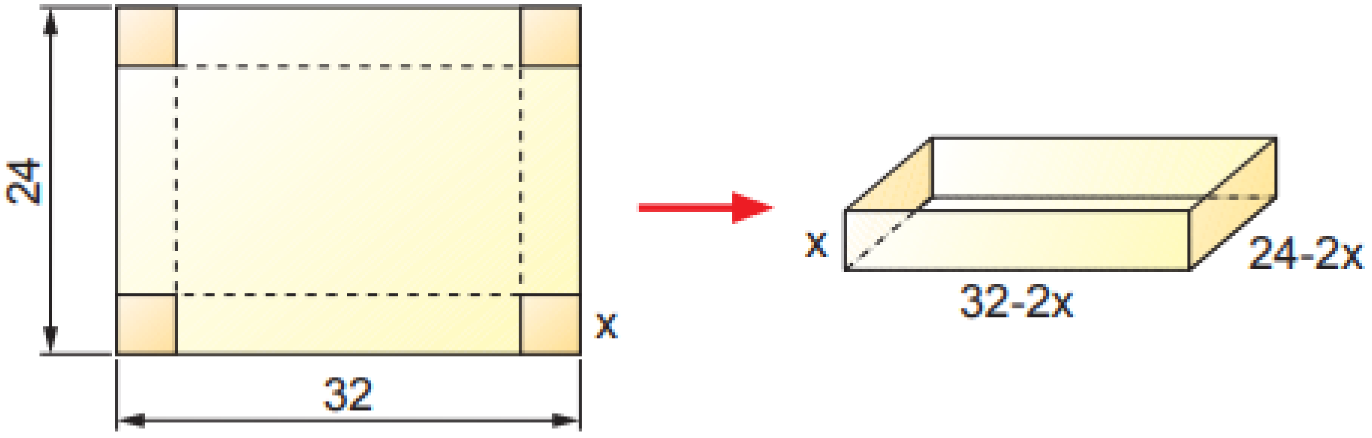


Fig. 3.2.

La caja es un prisma rectangular cuyo volumen = área de la base por la altura. Si se corta un cuadrado de lado x, la base será un rectángulo de dimensiones $32 - 2x$ y $24 - 2x$; su altura valdrá x. Por tanto, el volumen de la caja obtenida será:

$$V = (32 - 2x)(24 - 2x)\,x \Rightarrow V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

Bibliografía

- Heaussler, E., y Paul, R. (2003) Matemáticas para Administración y Economía. Decima edición. México: Pearson Educación.
- http://escuelanaval3.iplatense.com.ar/webesnm2015/apoyo/polinomios.pdf