Exponentes y Radicales

REGLAS

POTENCIACION	RADICAC ION
$a^m \cdot\ a^n = a^{m+n}$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ó $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Ing. Idialy Montoya Aguilar

Esp. Docencia Universitaria

Mg. Educación

Exponentes

1. $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}.$

2. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}}.$

3. $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n.$

4. $x^0 = 1$ si $x \neq 0$. 0^0 no está definido.

EJEMPLO 1 Exponentes

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}.$

b. $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{243}.$

c. $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = 243.$

d. $2^0 = 1, \pi^0 = 1, (-5)^0 = 1.$

e. $x^1 = x.$

EJEMPLO 2 | Exponentes cero y negativos

(a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

(b) $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

(c) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

Reglas para trabajar con exponentes

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

(a) $x^4x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $y^4y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ — Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(d) $(b^4)^5 = b^{4\cdot 5} = b^{20}$ — Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

(e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ — Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

(f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ — Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

(a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n\\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3}\\ &= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

LEYES DE EXPONENTES

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{2}$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^{m}}{a^{n}}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^{5}}{3^{2}}$	Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

(a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^{2}}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{3z^{3}}\right)^{-2}$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

t^{-4} pasa al denominador y se convierte en t^4

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

s^{-2} pasa al numerador y se convierte en s^2

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

(b) Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

Radicales

DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ n

Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz n principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

PROPIEDADES DE RAÍCES n

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Definición de $\sqrt[n]{a}$

Sea n un entero positivo mayor que 1 y sea a un número real.

(1) Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

(2) Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *positivo* tal que $b^n = a$.

(3) **(a)** Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real b *negativo* tal que $b^n = a$.

(b) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

La raíz n-ésima principal $\sqrt[n]{a}$

- $\sqrt{16} = 4$, porque $4^2 = 16$.
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real.

EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces *n*

(a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3x}$ Factorice el cubo más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

(b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$= 3x^2|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|, |x^2| = x^2$

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

(a)

$$\begin{aligned} \sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} && \text{Factorice los cuadrados más grandes} \\ &= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2} && \text{Propiedad 1: } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2} && \text{Propiedad Distributiva} \end{aligned}$$

(b) Si $b > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{25b} - \sqrt{b^3} &= \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b} && \text{Propiedad 1: } \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b} && \text{Propiedad 5, } b > 0 \\ &= (5 - b)\sqrt{b} && \text{Propiedad Distributiva} \end{aligned}$$

Exponentes racionales

DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

(c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$ **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

La notación exponencial $a^{m/n}$

- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$
- $x^{3/5} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^3 = \sqrt[5]{x^3}$
- $125^{2/3} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^2 = 5^2 = 25$
- $\left(\frac{32}{243}\right)^{3/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{32}{243}}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

(d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2

EJEMPLO 5 Simplificación de potencias racionales

Simplificar:

(a) $(-27)^{2/3}(4)^{-5/2}$ (b) $(r^2s^6)^{1/3}$ (c) $\left(\dfrac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned}
(-27)^{2/3}(4)^{-5/2} &= \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2\left(\sqrt{4}\right)^{-5} && \text{definición de exponentes racionales}\\
&= (-3)^2(2)^{-5} && \text{calcule raíces}\\
&= \frac{(-3)^2}{2^5} && \text{definición de exponentes negativos}\\
&= \tfrac{9}{32} && \text{calcule potencias}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
(r^2s^6)^{1/3} &= (r^2)^{1/3}(s^6)^{1/3} && \text{ley 3 de exponentes}\\
&= r^{2/3}s^2 && \text{ley 2 de exponentes}
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) &= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right) && \text{leyes de exponentes}\\
&= \frac{(4\cdot 3)x^{4/3-5/6}}{y^{1+(1/3)}} && \text{ley 1 de exponentes}\\
&= \frac{12x^{8/6-5/6}}{y^{4/3}} && \text{denominador común}\\
&= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}} && \text{simplifique} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ — Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ — Ley 1

(b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ — Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ — Ley 1

$= x^{3/4}$ — Ley 3

Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

(c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

EJEMPLO 4 Racionalización de denominadores

Racionalice cada denominador:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (d) $\sqrt[5]{\dfrac{x}{y^2}}$

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(b) $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

(c) $$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(d) $$\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y^2}}\frac{\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{y^3}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{\sqrt[5]{y^5}} = \frac{\sqrt[5]{xy^3}}{y}$$

Bibliografía

- Heaussler, E., y Paul, R. (2003) Matemáticas para Administración y Economía. Decima edición. México: Pearson Educación.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning Editores S.A.
- Swokowski, E., y Cole, J. (2011) Álgebra y Trigonometría con Geometría Análitica. Decimo tercera edición. México: Cengage Learning Editores S.A.