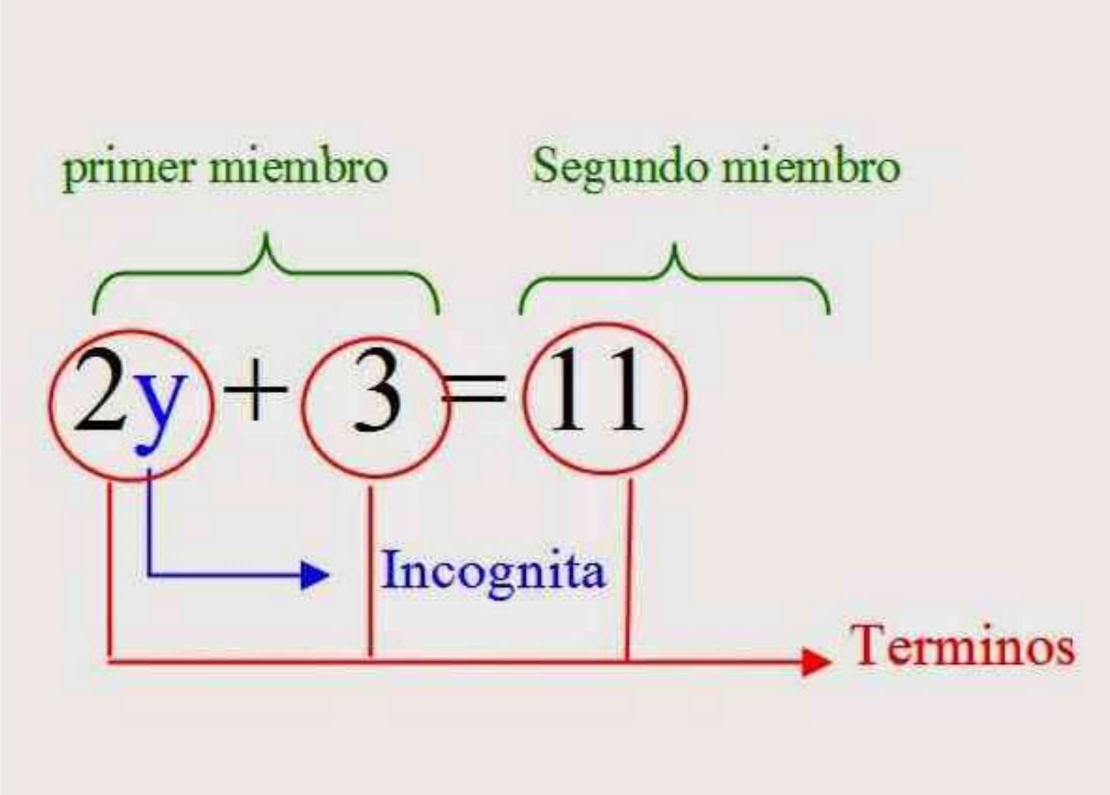
Ecuaciones

$$a)\ \frac{5x}{2} - \frac{2x+3}{6} = \frac{5}{3}$$

$$b)\ \frac{2x}{3} - \frac{5x-7}{6} = \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$



Ecuaciones

Recuerda:

- Una **ecuación** es una igualdad algebraica en la cual aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido.
- El **grado de una ecuación** viene dado por el exponente mayor de la incógnita.
- **Solucionar** una ecuación es determinar el valor o valores de las incógnitas que transformen la ecuación en una identidad.
- Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
- Para conseguir ecuaciones equivalentes, sólo se pueden efectuar alguna de las siguientes propiedades:
  Propiedad 1: Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión.
  Propiedad 2: Multiplicar o dividir las dos partes de la igualdad por un número distinto de cero.

Tipos

- ***Ecuaciones Polinómicas Enteras***: De la forma P(x) = 0

1. Ecuaciones Lineales: ax + b = 0 con a ≠ 0 y el exp $2(x-3)-3x=5$
2. Ecuaciones Cuadráticas $ax^2+bx+c=0$
3. Ecuaciones de 3er grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$
4. Ecuaciones de *n* grad $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$

- ***Ecuaciones Polinómicas Racionales*** De la forma P(x)/Q(x) = 0

$$\frac{x+1}{3x-6} - \frac{x-1}{2x+4} = \frac{10-x^2}{6x^2-24}$$

- ***Ecuaciones Polinómicas Irracionales*** Aquellas que tienen al menos un polinomio bajo el signo radical $\sqrt{x+4}=7$

Tipos

- ***Ecuaciones No Polinómicas***

1.Ecuaciones Exponenciales: Ecuaciones en donde la incógnita aparece en el exponente. Ejemplos:

$$5^{x} = 25$$

$$3^{x-1} + 3^{x} + 3^{x+1} = 117$$

2.Ecuaciones Logarítmicas: Ecuaciones en donde la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

$$2 \log x^{3} = \log 8 + 3 \log x$$

3.Ecuaciones Trigonométricas: Ecuaciones en donde la incógnita esta afectada por una función trigonométrica.

$$\text{Cos } 2x = 1 + 4 \text{ Sen } x$$

Solución de ecuaciones lineales

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	Ecuaciones no lineales	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable

EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$7x - 4 = 3x + 8$	Ecuación dada
$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$	Sume 4
$7x = 3x + 12$	Simplifique
$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$	Reste $3x$
$4x = 12$	Simplifique
$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$	Multiplique por $\frac{1}{4}$
$x = 3$	Simplifique

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

$x = 3$

LI $= 7(3) - 4$
$= 17$

$x = 3$

LD $= 3(3) + 8$
$= 17$

LI = LD ✔

Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$$AB = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = 0 \quad \text{o} \quad B = 0$$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x &= 24 \\
x^2 + 5x - 24 &= 0 && \text{Reste 24} \\
(x - 3)(x + 8) &= 0 && \text{Factorice} \\
x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 &= 0 && \text{Propiedad de Producto Cero} \\
x = 3 \qquad\qquad x &= -8 && \text{Resuelva}
\end{aligned}
$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$\underbrace{3}_{a = 3}x^2 \overbrace{-\,5}^{b = -5}x \underbrace{-\,1}_{c = -1} = 0$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

SOLUCIÓN

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

(c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

Bibliografía

Heaussler, E., y Paul, R. (2003) Matemáticas para Administración y Economía. Decima edición. México: Pearson Educación.
Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning Editores S.A.

http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/unidad3ecuaciones.pdf

http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/ind_ecuaciones.html