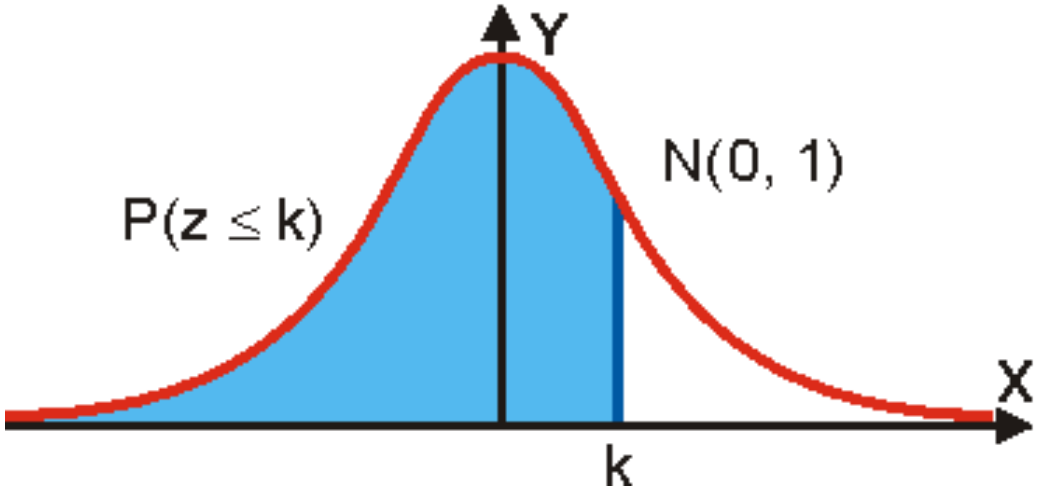
Distribuciones Continuas de Probabilidad

5ta. Unidad



Ing. Idialy Montoya Aguilar

Esp. Docencia Universitaria

Mg. Educación

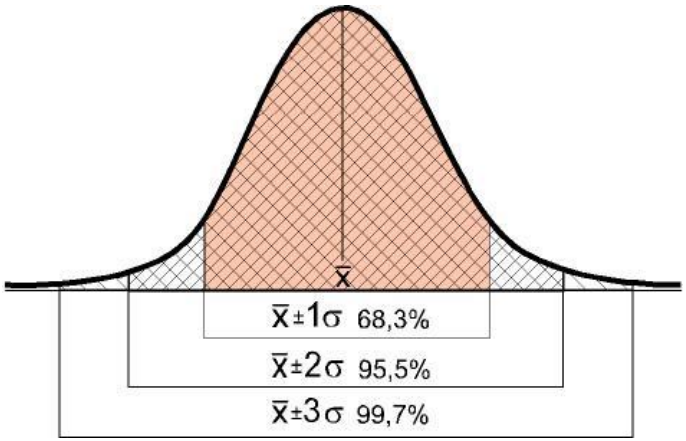
Distribuciones Continuas de Probabilidad

Distribución Normal:

La distribución continua de probabilidad más importante en todo el campo de la estadística es la ***distribución normal***. Su grafica, que se denomina ***curva normal***, es la curva con la forma de campana, la cual describe aproximadamente muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

La distribución normal a menudo se denomina **distribución gaussiana**, en honor de Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Le ecuación matemática para la distribución de probabilidad de la variable normal depende de los dos parámetros μ y σ, su media y desviación estándar.



Áreas bajo la curva normal:

La curva de cualquier distribución continua de probabilidad se construye de modo que el área bajo la curva limitada por las dos ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ es igual a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre $x = x_1$ y $x = x_2$.

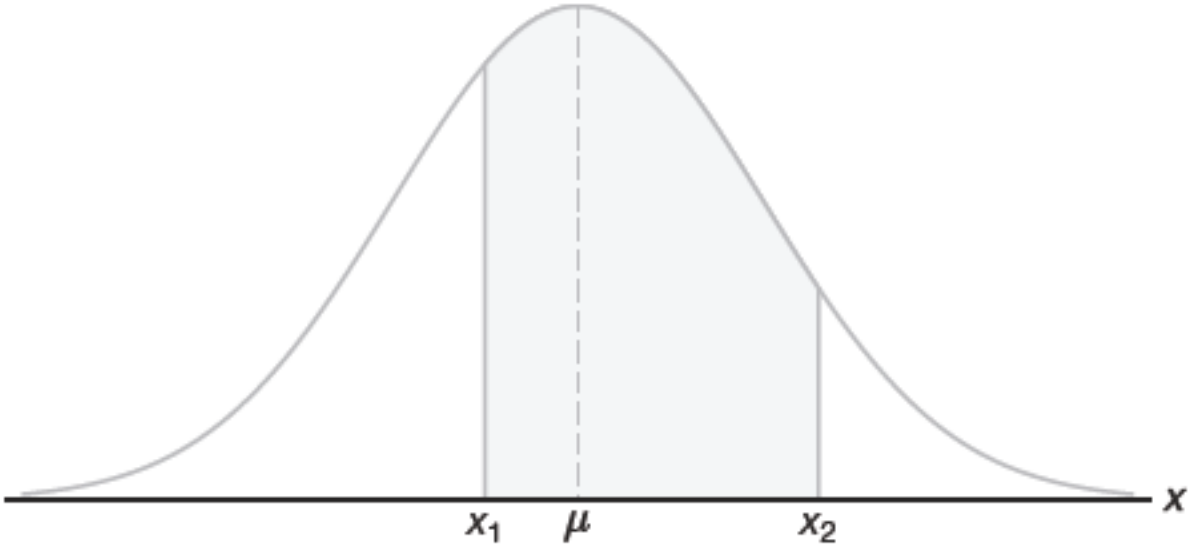


Figura 6.6: $P(x_1 < X < x_2)$ = área de la región sombreada.

La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar**.

Áreas bajo la curva normal:

Por fortuna es posible transformar todas las observaciones de cualquier variable aleatoria normal X en un nuevo conjunto de observaciones de una variable aleatoria normal Z, con media 0 y varianza 1, esto puede realizarse por medio de la transformación:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

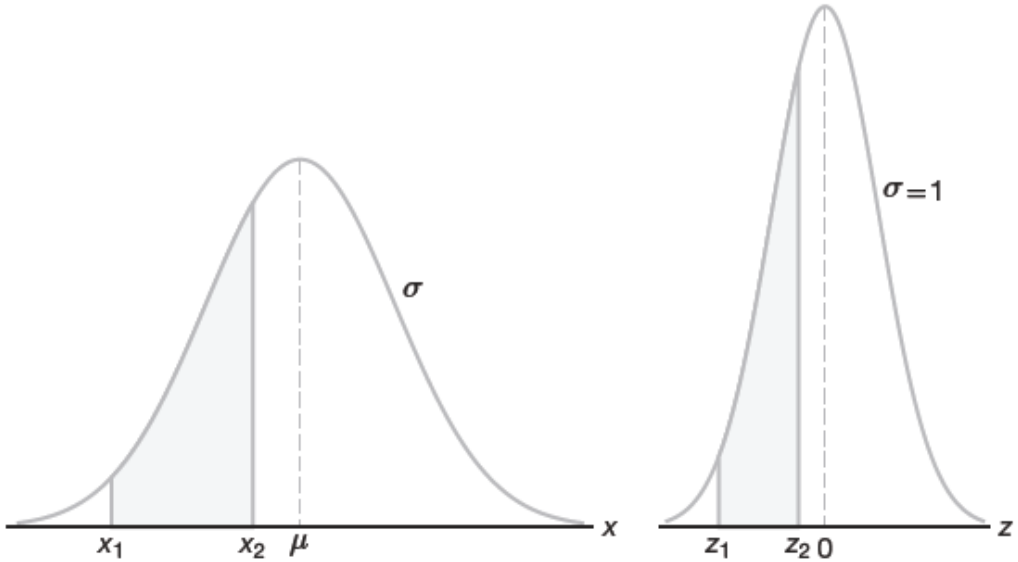
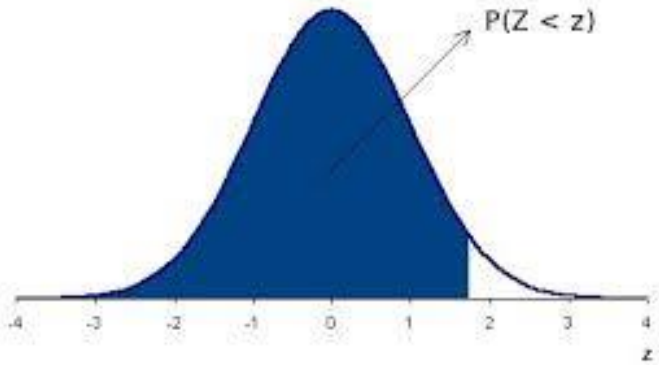


Figura 6.8: Distribuciones normales original y transformada.

Donde: Z se lee en las tablas A3. X es la variable aleatoria, μ es la media de la población y σ es la desviación estándar.



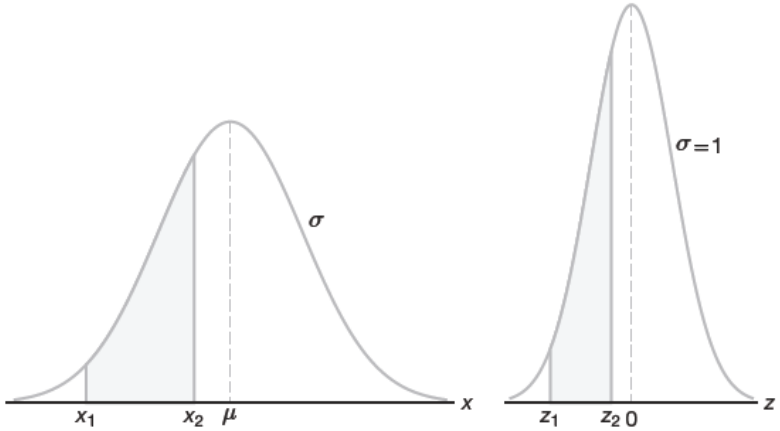


Figura 6.8: Distribuciones normales original y transformada.

La distribución de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 se llama **distribución normal estándar**.

Las distribuciones original y transformada se ilustran en la figura 6.8. Como todos los valores de X que caen entre x_1 y x_2 tienen valores z correspondientes entre z_1 y z_2, el área bajo la curva X entre las ordenadas $x = x_1$ y $x = x_2$ de la figura 6.8 es igual al área bajo la curva Z entre las ordenadas transformadas $z = z_1$ y $z = z_2$.

Ahora hemos reducido el número requerido de tablas de áreas de curva normal a una, la de la distribución normal estándar. La tabla A.3 indica el área bajo la curva normal estándar que corresponde a $P(Z < z)$ para valores de z que van de –3.49 a 3.49. Para ilustrar el uso de esta tabla calculemos la probabilidad de que Z sea menor que 1.74. Primero, localizamos un valor de z igual a 1.7 en la columna izquierda, después nos movemos a lo largo del renglón hasta la columna bajo 0.04, donde leemos 0.9591. Por lo tanto, $P(Z < 1.74) = 0.9591$. Para calcular un valor z que corresponda a una probabilidad dada se invierte el proceso. Por ejemplo, se observa que el valor z que deja un área de 0.2148 bajo la curva a la izquierda de z es –0.79.

Ejemplo 6.2:

Dada una distribución normal estándar, calcule el área bajo la curva que se localiza

a) a la derecha de $z = 1.84$, y

b) entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$.

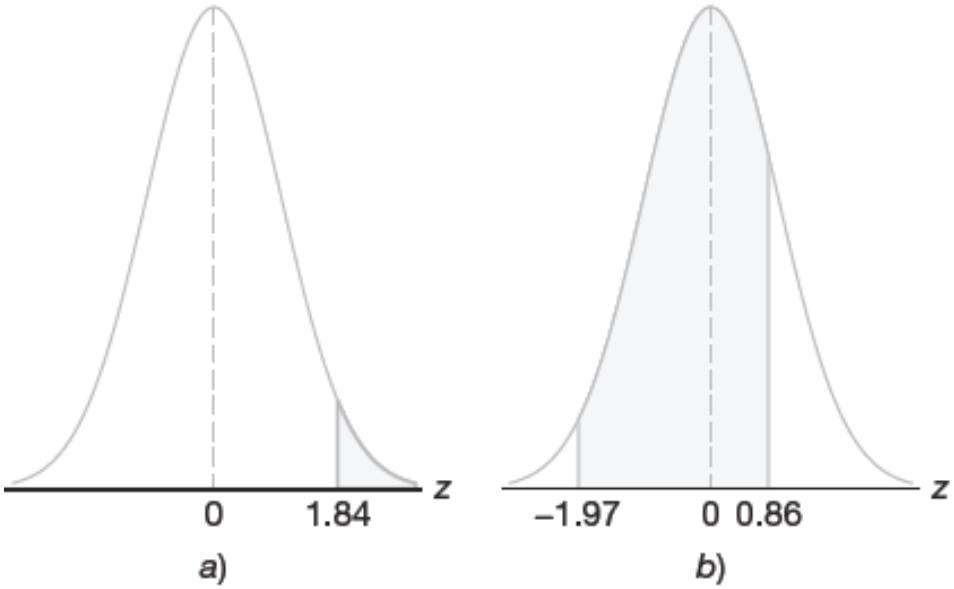


Figura 6.9: Áreas para el ejemplo 6.2.

***Solución*:**

Véase la figura 6.9 para las áreas específicas.

a) El área en la figura 6.9*a* a la derecha de $z = 1.84$ es igual a 1 menos el área en la tabla A.3 a la izquierda de $z = 1.84$, a saber, $1 - 0.9671 = 0.0329$.

b) El área en la figura 6.9*b* entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$ es igual al área a la izquierda de $z = 0.86$ menos el área a la izquierda de $z = -1.97$. A partir de la tabla A.3 encontramos que el área que se desea es $0.8051 - 0.0244 = 0.7807$.

Distribución normal estándar.

Es la distribución de una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1.

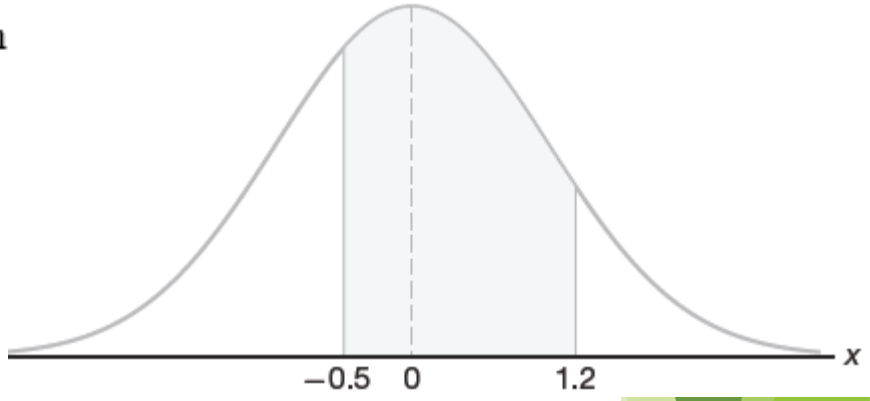
Ejemplo : Dada una distribución normal con μ = 50 **y** σ = 10, encuentre la probabilidad de que X tome un valor entre 45 y 62.

Solución

Los valores Z que corresponden a $X_1 = 45$ y $X_2 = 62$ son

$$Z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5$$

$$Z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$



Por tanto, $P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2)$

La $P(-.05 < Z < 1.2)$ se muestra por el área de la región sombreada de la figura 6.11. Esta área se puede encontrar al restar el área a la izquierda de z = 1.2. Con el uso de la tabla A.3, tenemos

$$P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085$$

P=0.5764

Ejemplo 6.5: Dado que X tiene una distribución normal con $\mu = 300$ y $\sigma = 50$, calcule la probabilidad de que X tome un valor mayor que 362.

***Solución*:** La distribución de probabilidad normal que muestra el área sombreada que se desea se presenta en la figura 6.12. Para calcular $P(X > 362)$ necesitamos evaluar el área bajo la curva normal a la derecha de $x = 362$. Esto se puede realizar transformando $x = 362$ al valor z correspondiente, obteniendo el área a la izquierda de z de la tabla A.3 y después restando esta área de 1. Encontramos que

$$z = \frac{362 - 300}{50} = 1.24.$$

De ahí,

$$P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24) = 1 - 0.8925 = 0.1075.$$

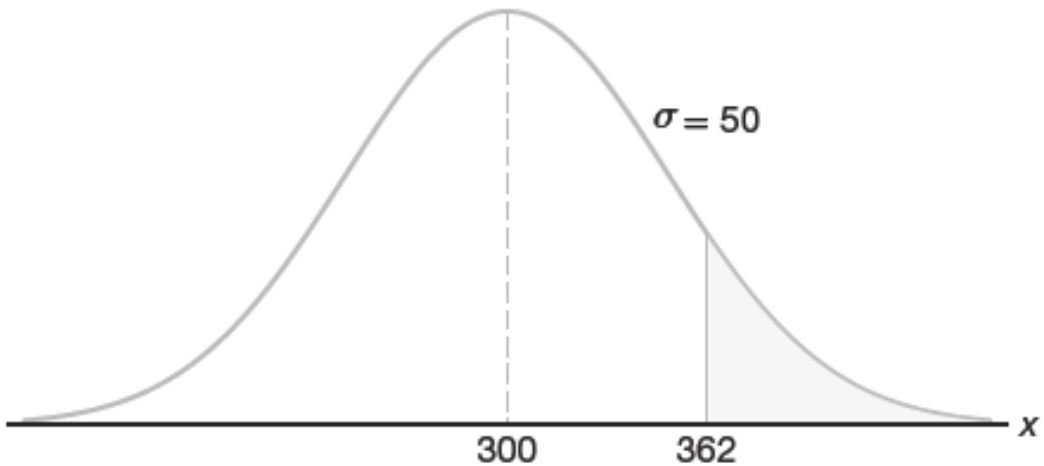


Figura 6.12: Área para el ejemplo 6.5.

Bibliografía

- Walpole, R., Myers, S. y Ye, K., (2012), Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, 9na Ed. México, Pearson.