Desigualdades

- $<$ menor que
- $>$ mayor que
- $\leq$ menor o igual que
- $\geq$ mayor o igual que

Docente: Idialy Montoya A.

Desigualdades

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$2(x - 3) < 4.$$

Desigualdades o Inecuaciones

Relación entre dos expresiones que no son iguales, con frecuencia se escriben con los símbolos $>$, $\underline{>}$, $<$ y $\underline{<}$, que significan mayor que, mayor o igual que, menor que, menor o igual que, respectivamente.

Símbolo	Significado	Ejemplo
$<$	Menor que	$3x - 1 < 2x$
$\leq$	Menor o igual que	$2x + 3 \leq 4x - 1$
$>$	Mayor que	$5x + 1 > 2$
$\geq$	Mayor o igual que	$2x - 3 \geq 3x - 2$

Solución de una Inecuación

La solución de una inecuación es un subconjunto de los números reales, que se puede representar por:

- Un conjunto A= {x / -2 < x < 3}
- Un intervalo. (-2, 3)
- Una expresión grafica

Intervalo

Definición: Son sub conjuntos de los números reales, es decir son una parte de la recta comprendida entre dos valores.

(a, b)

Pueden ser:

- Abiertos
- Cerrados
- Semi-abiertos: Abierto por la derecha o Abierto por la izquierda.

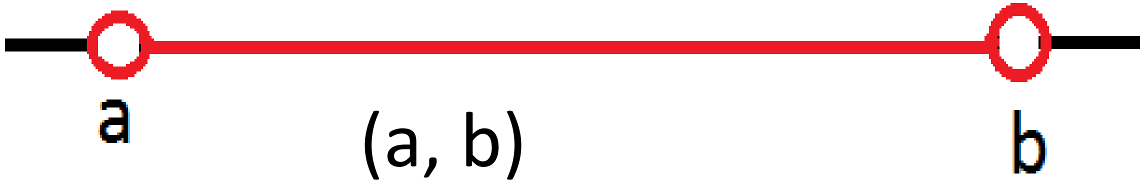
Representación de un Intervalo

Un intervalo lo podemos representar con elementos como los paréntesis y los corchetes, así mismo la manera grafica de representar un intervalo es a partir de la recta numérica, donde los extremos se representan con círculos vacíos si son abiertos o llenos si son cerrados, como se muestra a continuación.

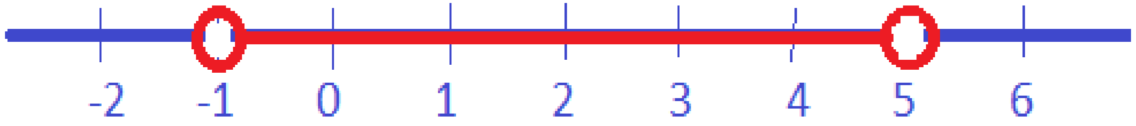
$(a, b]$

Intervalos Abiertos

Un intervalo abierto es aquel donde los extremos no hacen parte de el, es decir no toma los extremos



(a, b)



(-1, 5)

Intervalos Cerrados

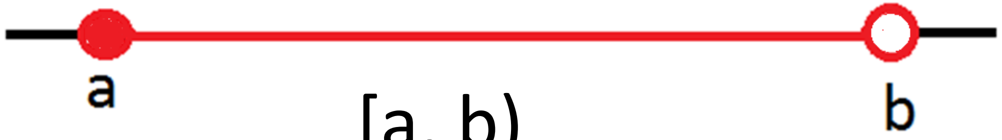
Un intervalo cerrado es aquel donde los extremos hacen parte de el, es decir toma los extremos

[a, b]

[-1, 5]

Intervalos abiertos por la Derecha

Un intervalo semi abierto por la derecha es aquel donde el extremo de la derecha no hace parte de el, es decir no toma el extremo de la derecha.

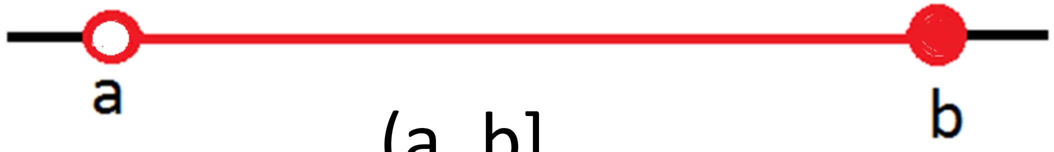


[a, b)

[-1, 5)

Intervalos abiertos por la izquierda

Un intervalo semi abierto por la izquierda es aquel donde el extremo de la izquierda no hace parte de el, es decir no toma el extremo de la izquierda



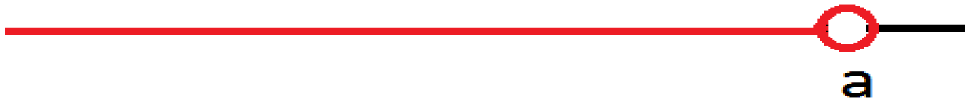
(a, b]

(-1, 5]

Intervalos al infinito

Un intervalo al infinito es aquel donde alguno de sus extremos es infinito, y el otro puede ser abierto o cerrado18

$(-\infty, a)$



(a, ∞)

$(-\infty, a]$

$[a, \infty)$

Intervalos

¿Qué incluye?	Intervalo	Gráfica
a y b y todos los números entre ambos	$[a, b]$	
todos los reales entre a y b pero sin ellos	(a, b)	
todos los reales entre a y b y al número b pero NO incluye a	$(a, b]$	
todos los reales entre a y b y al número a pero NO incluye b	$[a, b)$	
todos los reales mayores que a pero NO incluye a	(a, ∞)	
todos los reales mayores o iguales que a	$[a, \infty)$	
todos los reales menores que b pero NO incluye b	$(^{-}\infty, b)$	
todos los reales menores o iguales que b	$(^{-}\infty, b]$	

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0 \quad$ y $\quad B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$	**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B \quad$ y $\quad C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Solución de una Inecuación

- Para hallar la solución de una inecuación se debe establecer el intervalo solución y su representación grafica en la recta real, para ello se deben tener en cuenta las siguientes observaciones:

- En una inecuación la variable (x) debe quedar completamente despejada, dejando los números a un extremo o a ambos extremos de acuerdo al tipo de inecuación.

- Cuando se cambian los términos de una inecuación se debe aplicar la propiedad cancelativa

(si $x + a = y + a$, entonces $x = y$), lo que podríamos reducir a una expresión común que dice si un termino que esta sumando o restando lo podemos pasar al otro lado de la desigualdad con signo contrario.

- Si un termino que esta multiplicado lo podemos pasar al otro lado de la desigualdad a dividir, teniendo en cuenta que si el termino es negativo la desigualdad cambia de sentido.

- Si un termino que esta dividiendo lo podemos pasar al otro lado de la desigualdad a multiplicar, teniendo en cuenta que si el termino es negativo la desigualdad cambia de sentido.

Clasificación de las Desigualdades

- ***Desigualdades Lineales:*** Aquellas que son de grado uno, y tiene como solución un solo intervalo. Ejemplo: $4x - 3 \geq 2x + 3$

- ***Desigualdades Cuadráticas:*** Son aquellas cuya expresión es de grado 2, y pueden tener uno o dos intervalos de solución. Regularmente en una inecuación cuadráticas se deben utilizar elementos algebraicos como la factorización para dar solución a esta. Ejemplo $x^2 - 6x + 8 > 0$

- ***Desigualdades Racionales:*** Son aquellas que son el cociente de dos expresiones algebraicas, Ejemplo: $(x - 3)/(x - 2) > 0$

- ***Desigualdades con Valor Absoluto:*** Son aquellas que están dentro de valor absoluto,

  Ejemplo: $| x - 3 | > 2$

Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$3x < 9x + 4 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \qquad \text{Reste } 9x$$

$$-6x < 4 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\tfrac{1}{6}\right)(4) \qquad \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{6} \text{ e invierta la desigualdad}$$

$$x > -\tfrac{2}{3} \qquad \text{Simplifique}$$

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. Está graficada en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21** ■

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

SOLUCIÓN El conjunto solución está formado por todos los valores de x que satisfacen las desigualdades $4 \leq 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4 \leq 3x - 2 < 13 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$6 \leq 3x < 15 \qquad \text{Sume 2}$$

$$2 \leq x < 5 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se ve en la Figura 2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

SOLUCIÓN Seguiremos la guía dada líneas antes.

Pase todos los términos a un lado. Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \qquad \text{Reste } 5x\text{, sume } 6$$

Factorice. Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \qquad \text{Factorice}$$

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $x - 2$ y $x - 3$. Estos factores son cero cuando x es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

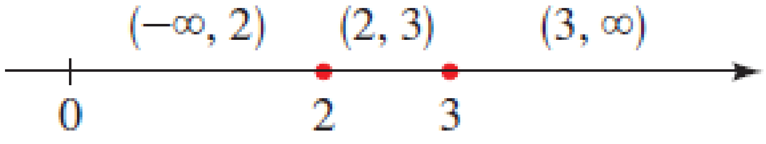


FIGURA 3

Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

Haga una tabla o diagrama. Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba.** Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el número que escojamos. Para el intervalo $(-\infty, 2)$, escojamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por x en los factores $x - 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores $x - 2$ y $x - 3$ no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

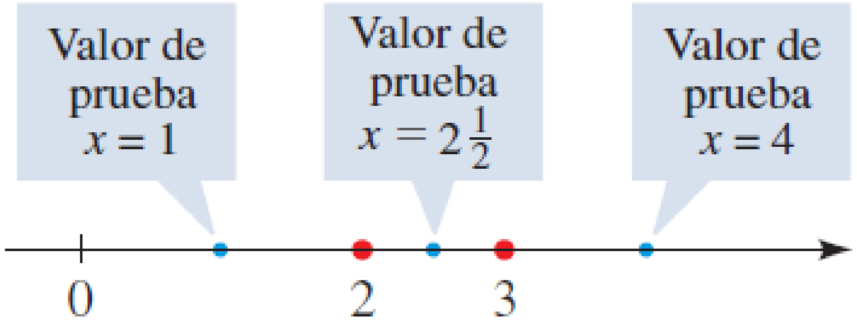


FIGURA 4

Usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:

		2		3	
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

Resuelva. Leemos de la tabla o el diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Entonces, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor o *igual a* cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

EJEMPLO 4 | Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$.

SOLUCIÓN Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son x, $(x - 1)^2$ y $x - 3$. Éstos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<3$	$x>3$
Signo de x	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x(x-1)^2(x-3)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Resuelva. Del diagrama vemos que $x(x-1)^2(x-3) < 0$ para x en el intervalo $(0, 1)$ o para x en $(1, 3)$. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

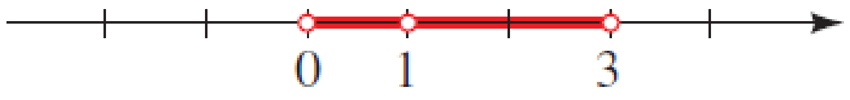


FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

SOLUCIÓN

Pase todos los términos a un lado. Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

Encuentre los intervalos. Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1-x$. Éstos son cero cuando x es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

Haga un diagrama. Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

		0		1	
Signo de $2x$	$-$		$+$		$+$
Signo de $1 - x$	$+$		$+$		$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1 - x}$	$-$		$+$		$-$

Resuelva. Del diagrama vemos que $\dfrac{2x}{1 - x} \geq 0$ para x en el intervalo $[0, 1)$. Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor *o igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.

FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Ejemplo 5 Resolución de una desigualdad con tres factores

Resuelva la desigualdad $x < \dfrac{2}{x-1}$.

Solución Después de pasar todos los términos no cero a un lado de la desigualdad, utilizamos un común denominador para combinar los términos.

$$x - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Resta de } \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Común denominador } x-1$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} < 0 \qquad \text{Combinación de fracciones}$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

Determine los intervalos

Los factores en este cociente cambian de signo en -1, 1 y 2, de modo que debemos examinar los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al usar los valores de prueba, obtenemos el siguiente diagrama de signos.

Elabore un diagrama

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Resuelva.

Como el cociente debe ser negativo, la solución es

$$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

como se ilustra en la figura 7.

Figura 7

Modelado con desigualdades

EJEMPLO 8 | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{número de viajes en juego mecánico}$$

Convierta las palabras en álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de viajes	x
Costo con Plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{costo con Plan A}} < \boxed{\text{costo con Plan B}}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$3 + 0.25x < 0.50x \qquad \text{Reste 2}$$

$$3 < 0.25x \qquad \text{Reste } 0.25x$$

$$12 < x \qquad \text{Divida entre 0.25}$$

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **107**

EJEMPLO 9 | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius

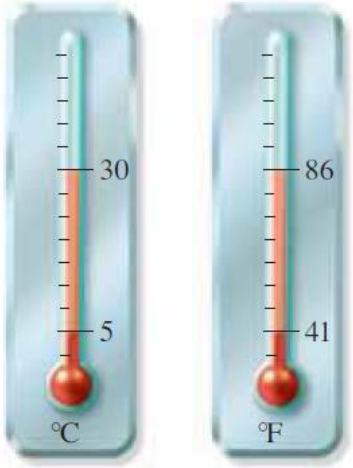
Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

SOLUCIÓN La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

$$
\begin{aligned}
5 &< \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 && \text{Sustituya } C = \tfrac{5}{9}(F - 32) \\
\tfrac{9}{5} \cdot 5 &< F - 32 < \tfrac{9}{5} \cdot 30 && \text{Multiplique por } \tfrac{9}{5} \\
9 &< F - 32 < 54 && \text{Simplifique} \\
9 + 32 &< F < 54 + 32 && \text{Sume 32} \\
41 &< F < 86 && \text{Simplifique}
\end{aligned}
$$



La medicina debe conservarse a una temperatura entre 41°F y 86°F.

Ecuaciones con valor absoluto

En la recta de los números reales, a la distancia desde el cero hasta un número x se le llama el **valor absoluto** de x, el cual se denota por $|x|$. Por ejemplo, $|5| = 5$ y $|-5| = 5$, ya que tanto el 5 como el -5 están a 5 unidades del cero (véase la fig. 2.17). En forma similar, $|0| = 0$. Note que x nunca puede ser negativo, esto es $|x| \geq 0$.

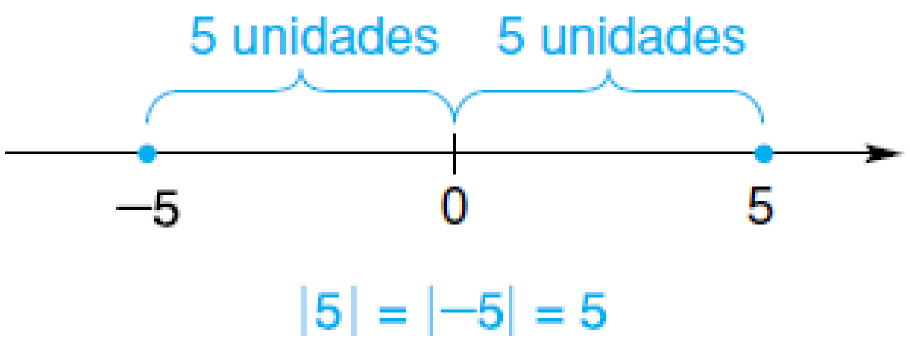


FIGURA 2.17 Valor absoluto.

Definición

El ***valor absoluto*** de un número real x, escrito $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0, \\ -x, \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la definición, tenemos $|3| = 3$, $|-8| = -(-8)$ y $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. También, $-|2| = -2$ y $-|-2| = -2$.

EJEMPLO 1 Resolución de ecuaciones con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 3| = 2$.

Solución: esta ecuación establece que $x - 3$ es un número que está a 2 unidades del cero. Por tanto,

$$x - 3 = 2 \text{ o } x - 3 = -2.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = 5$ o $x = 1$.

b. *Resolver* $|7 - 3x| = 5$.

Solución: esta ecuación es verdadera si $7 - 3x = 5$ o si $7 - 3x = -5$. Resolviéndolas se obtiene $x = \frac{2}{3}$ o $x = 4$.

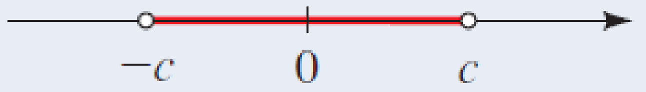
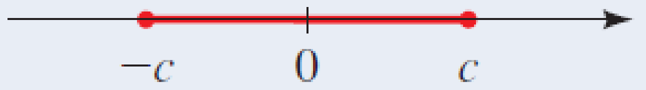
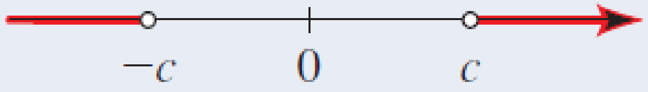
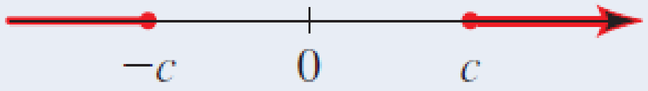
c. *Resolver* $|x - 4| = -3$.

Solución: el valor absoluto de un número nunca es negativo, de modo que el conjunto solución es $\emptyset$.

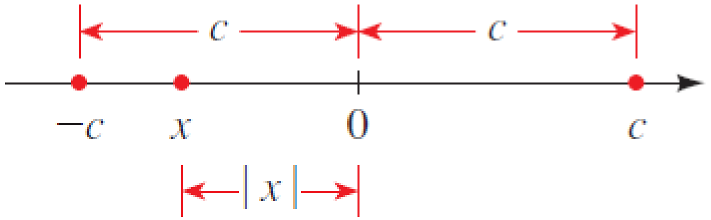
Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x \rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $\lvert x \rvert \geq c$	$x \leq -c$ o $c \leq x$	

Estas propiedades se pueden demostrar con el uso de la definición de valor absoluto. Para demostrar la Propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $\lvert x \rvert < c$ dice que la distancia de x a 0 es menor que c, y de la Figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si x está entre $-c$ y c.



EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|x - 5| < 2$.

SOLUCIÓN 1 La desigualdad $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

SOLUCIÓN 2 Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números x cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo $(3, 7)$.

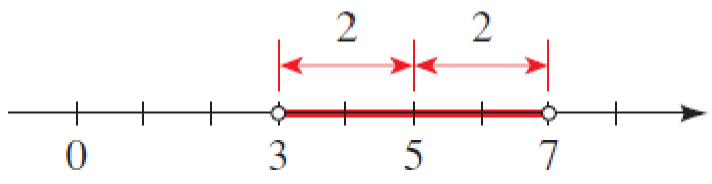


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 4, la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 3x + 2 &\geq 4 & \quad \text{o} \quad && 3x + 2 &\leq -4 & \\ 3x &\geq 2 & && 3x &\leq -6 & \quad \text{Reste 2} \\ x &\geq \tfrac{2}{3} & && x &\leq -2 & \quad \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.

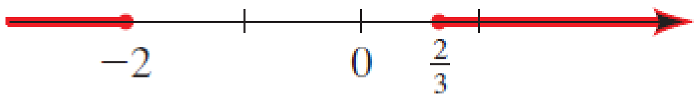


FIGURA 10

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

EJEMPLO 2 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x - 2| < 4$.

Solución: el número $x - 2$ debe estar a menos de 4 unidades del cero. Del análisis anterior, eso significa que $-4 < x - 2 < 4$. Podemos establecer el procedimiento para resolver esta desigualdad como sigue:

$$-4 < x - 2 < 4,$$

$$-4 + 2 < x < 4 + 2 \qquad \text{(sumando 2 a cada miembro),}$$

$$-2 < x < 6.$$

Así, la solución es el intervalo abierto $(-2, 6)$. Esto significa que todos los números reales entre -2 y 6 satisfacen la desigualdad original (véase la fig. 2.20).

b. *Resolver* $|3 - 2x| \leq 5.$

Solución:

$$-5 \leq 3 - 2x \leq 5,$$

$$-5 - 3 \leq -2x \leq 5 - 3 \qquad \text{(restando 3 de cada miembro),}$$

$$-8 \leq -2x \leq 2,$$

$$4 \geq x \geq -1 \qquad \text{(dividiendo cada miembro entre } -2\text{),}$$

$$-1 \leq x \leq 4 \qquad \text{(reescribiendo).}$$

Note que el sentido de la desigualdad original se *invirtió* cuando dividimos entre un número negativo. La solución es el intervalo cerrado $[-1, 4]$.

EJEMPLO 3 Resolución de desigualdades con valor absoluto

a. *Resolver* $|x + 5| \geq 7$.

Solución: aquí $x + 5$ debe estar *al menos* a 7 unidades del cero. Así que, $x + 5 \leq -7$ o bien $x + 5 \geq 7$. Esto significa que $x \leq -12$ o bien $x \geq 2$. Por tanto, la solución consiste en dos intervalos: $(-\infty, -12]$ y $[2, \infty)$. Podemos abreviar esta colección de números escribiendo

$$(-\infty, -12] \cup [2, \infty).$$

donde el símbolo $\cup$ es llamado el símbolo de la *unión* (véase la fig. 2.21). Más formalmente, la **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto que consiste en todos los elementos que están en A o en B (o en ambos).

b. *Resolver* $|3x - 4| > 1$.

Solución: $3x - 4 < -1$ o bien $3x - 4 > 1$. Así que $3x < 3$ o bien $3x > 5$. Por tanto, $x < 1$ o $x > \frac{5}{3}$, de modo que la solución consiste en todos los números reales en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$.

En el ejemplo siguiente nos referimos a algunos términos de negocios relativos a una compañía manufacturera. **Costo fijo** (*o gastos generales*) es la suma de todos los costos que son independientes del nivel de producción, como renta, seguros, etc. Este costo debe pagarse independientemente de que se produzca o no. **Costo variable** es la suma de todos los costos dependientes del nivel de producción, como salarios y materiales. **Costo total** es la suma de los costos variable y fijo:

$$\text{costo total} = \text{costo variable} + \text{costo fijo.}$$

Ingreso total es el dinero que un fabricante recibe por la venta de su producto. Está dado por:

$$\text{ingreso total} = (\text{precio por unidad})(\text{número de unidades vendidas}).$$

Utilidad (o ganancia) es el ingreso total menos el costo total:

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total.}$$

Aplicaciones de desigualdades

La resolución de problemas expresados con palabras algunas veces puede implicar desigualdades, como lo ilustran los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Utilidad

Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 *por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción) son* \$70,000. *Si el precio de venta de un calentador es* \$35, *¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?*

Solución:

Estrategia: recuerde que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}.$$

Debemos encontrar el ingreso total y después determinar cuándo su diferencia es positiva.

Sea q el número de calentadores que deben venderse. Entonces su costo es $21q$. Por tanto, el costo total para la compañía es $21q + 70{,}000$. El ingreso total de la venta de q calentadores será $35q$. Ahora,

$$\text{utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total},$$

y queremos que la utilidad > 0. Así,

$$\begin{aligned} \text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\ 35q - (21q + 70{,}000) &> 0, \\ 14q &> 70{,}000, \\ q &> 5000. \end{aligned}$$

Por tanto, deben venderse al menos 5001 calentadores para que la compañía genere utilidades.

EJEMPLO 2 Renta *versus* compra

Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de \$3000 *mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (gas, aceite y operador) sería de* \$180 *por cada día que la máquina se utilice. Si él fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de* \$20,000 *y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de* \$230 *por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuántos días al año por lo menos, tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?*

Solución:

Estrategia: vamos a determinar expresiones para el costo anual de la renta y el costo anual de la compra, así encontraremos cuándo el costo de la renta es menor que el de la compra.

Sea d el número de días de cada año que la máquina será utilizada. Si la máquina se renta, el costo total anual consiste en los gastos de la renta, que son $(12)(3000)$ y los costos diarios de $180d$. Si la máquina se compra, el costo por año es $20000 + 230d$. Queremos que

$$
\begin{aligned}
\text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}}\,, \\
12(3000) + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\
36{,}000 + 180d &< 20{,}000 + 230d, \\
16{,}000 &< 50d, \\
320 &< d.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el constructor debe utilizar la máquina al menos 321 días para justificar rentarla.

EJEMPLO 4 Publicidad

Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de \$1.50. *El ingreso recibido de los distribuidores es* \$1.40 *por revista. El ingreso por publicidad es* 10% *de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de* 10,000. *¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?*

Solución:

Estrategia: tenemos que utilidad $=$ ingreso total $-$ costo total, de modo que encontramos una expresión para la utilidad y después la hacemos mayor que cero.

Sea q el número de revistas vendidas. El ingreso recibido de los distribuidores es $1.40q$ y el recibido por publicidad es $(0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)]$. El costo total de la publicación es $1.50q$. Así,

$$
\begin{aligned}
\text{ingreso total} - \text{costo total} &> 0. \\
1.40q + (0.10)[(1.40)(q - 10{,}000)] - 1.50q &> 0, \\
1.4q + 0.14q - 1400 - 1.5q &> 0, \\
0.04q - 1400 &> 0, \\
0.04q &> 1400, \\
q &> 35{,}000.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el número total de revistas debe ser mayor que 35,000. Esto es, al menos 35,001 ejemplares deben venderse para garantizar utilidades.

Bibliografía

- Heaussler, E., y Paul, R. (2003) Matemáticas para Administración y Economía. Decima edición. México: Pearson Educación.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012) Precálculo. Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning Editores S.A.