1. RAZONAMIENTO

Ejemplo

Observemos los siguientes razonamientos:

Solución

No consuma droga.

a. La droga destruye su salud.

b. La salud es vital para el correcto desarrollo de su cuerpo.

c. Su cuerpo es vida.

d. Por eso no consuma droga.

Viaje en avión.

a. El avión es uno de los medios de transporte más seguro.

b. Es bastante seguro, pues casi no se presentan accidentes.

c. Los accidentes producen lesiones permanentes e incluso la muerte.

d. Por eso viaje en avión.

Conclusión

El ***razonamiento*** es el proceso mediante el cual se obtienen conclusiones a partir de una información dada. Un razonamiento es válido cuando la verdad de la conclusión se sigue necesariamente de la verdad de la información dada.

→ Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 \geq 0$

a. Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $a^2 = a \cdot a > 0$

b. Si $a \in \mathbb{R}^-$, entonces $-a \in \mathbb{R}^+$ y $a^2 = (-a)(-a) > 0$

c. Si $a = 0$; entonces $a^2 = a \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$

d. Luego $a^2 \geq 0$.

→ Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $a(b - c) = ab - ac$

a. $a(b - c) = a(b + (-c))$

b. $a(b + (-c)) = ab + a(-c)$

c. $ab + a(-c) = ab - ac$

d. Luego $a(b - c) = ab - ac$

→ Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

a. $(a + b)(a - b) = (a + b)a - (a + b)b$

b. $(a + b)a - (a + b)b = a^2 + ba - ab - b^2$

c. $a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2$

d. Luego $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

2. PROPOSICIÓN

Ejemplo

Analicemos los siguientes enunciados:

Solución

Los Estados Unidos fueron sede del campeonato mundial de fútbol de 1994.

La Tierra es un planeta.

El álgebra es una rama de la matemática.

El computador permite realizar trabajos escritos.

El periódico circula todos los días.

El agua es esencial para la vida.

El hombre es una especie en vía de extinción.

Al analizar detenidamente los enunciados anteriores nos damos cuenta de que en cada uno de ellos podemos afirmar si son verdaderos o falsos.

Conclusión

Una ***proposición*** es una expresión con sentido completo, de la cual puede afirmarse si es verdadera o falsa. Se acostumbra emplear las letras *p, q, r, s, t,* u otras para designar proposiciones. Si la proposición es verdadera se escribe una V; si es falsa, una F.

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

a. 2 es un número par.
b. ¿Qué hora es?
c. $(-5)^3 = 125$.
d. La circunferencia posee área.
e. El conjunto vacío.
f. El triángulo es una figura plana.
g. 21 es un número primo.
h. 215 es divisor de 732.
i. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$
j. $0^{-1} = 0$
k. $(-2)^2 = -4$

Al observar las expresiones b y e vemos que no puede afirmarse si son verdaderas o falsas, por tanto, dichos enunciados no son proposiciones.

La proposición c es falsa, ya que todo número negativo elevado a una potencia impar es negativo.

La proposición d es falsa, pues es el círculo el que posee área y no la circunferencia.

La proposición g es falsa, porque 21 es divisible por 3 y por 7.

La proposición h es falsa, ya que no existe un número entero que multiplicado por 215 sea 732.

La proposición j es falsa, pues el cero no tiene inverso multiplicativo.

La proposición k es falsa, pues todo número real elevado a una potencia par es siempre positivo.

Las proposiciones a, f e i son verdaderas.

3. PROPOSICIONES COMPUESTAS

Ejemplo

Veamos las siguientes proposiciones:

Una semana tiene 7 días y un año, 12 meses.
Si hoy es sábado, entonces mañana será domingo.
El 8 es un número primo o par.
El Sol sale de día si y sólo si la Luna sale de noche.
Soy hombre o mujer.

Solución

Las anteriores expresiones son proposiciones con una característica especial, por ejemplo, al tomar la cuarta proposición: "El Sol sale de día si y sólo si la Luna sale de noche", se observa cómo esta proposición puede descomponerse en dos proposiciones:

El Sol sale de día

La Luna sale de noche

Sin embargo, para poder formar la proposición en cuestión es necesario unir las dos anteriores proposiciones mediante la expresión "si y sólo si".

De igual forma, las demás proposiciones están formadas por dos proposiciones que están conectadas mediante palabras como "entonces", "o", "y".

Conclusión

Las ***proposiciones compuestas*** están formadas por dos o más proposiciones, unidas mediante partículas del lenguaje o conectivos lógicos, como son: "***y***", "***o***", "***entonces***", "***si y sólo si***". Aquellas proposiciones que no pueden descomponerse reciben el nombre de ***proposiciones simples***.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son simples y cuáles son compuestas?

✓ a. –7 es número par o negativo.

✓ b. 2 es primo y par a la vez.

✓ c. Si 12 es racional entonces 12 + 1 es racional.

d. 10 es un múltiplo de 5.

✓ e. 12 es par si y sólo si es divisible por 2.

f. 15 es impar y no primo.

g. El cuadrado de un número real siempre es no negativo.

La proposición a es compuesta porque utiliza el conectivo "o".
La proposición b es compuesta porque utiliza el conectivo "y".
La proposición c es compuesta ya que utiliza el conectivo "entonces".
Las proposiciones d y g son simples ya que no tienen ningún conectivo lógico.
La proposición e es compuesta porque utiliza el conectivo "si y sólo si".
La proposición f es compuesta debido a que utiliza el conectivo "y".

4. NEGACIÓN

Ejemplo

Determinemos la negación de las siguientes proposiciones:

a. El Sol sale en la noche.
b. Estoy en noveno.
c. La música en español me gusta.
d. Los libros me sirven para aprender.
e. Los computadores agilizan el trabajo.

Solución

a. El Sol no sale en la noche.
b. No estoy en noveno.
c. La música en español no me gusta.
d. Los libros no me sirven para aprender.
e. Los computadores no agilizan el trabajo.

En las anteriores proposiciones se ve cómo la segunda afirmación niega la primera.

Conclusión

La ***negación de una proposición*** es afirmar lo contrario de lo que dice la proposición. Si "p" es una proposición, su negación "no p" se simboliza "$\sim p$". Si una proposición es verdadera su negación es falsa y si la proposición es falsa su negación es verdadera. Esta observación puede resumirse en una tabla, llamada ***tabla de verdad***, como la siguiente:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Escribamos la negación de las siguientes proposiciones:

a. $4^2 + 4 + 16 = (6)(6)$
b. 9^3 es impar.
c. El conjunto vacío es aquel que no tiene elementos.
d. $6 < 7$
e. 19 es múltiplo de 19
f. $13\,423 \geq 5\,674$
g. Los números primos son impares.

a. $4^2 + 4 + 16 \neq (6)(6)$
b. 9^3 es par.
c. El conjunto vacío es aquel que tiene elementos.
d. $6 \geq 7$
e. 19 no es múltiplo de 19
f. $13\,423 < 5\,674$
g. Los números primos no son im pares.

5. CONJUNCIÓN

Ejemplo

Observemos las siguientes proposiciones:

a. El baloncesto y el fútbol son deportes.
b. Un día tiene 24 horas y una semana tiene 6 días.
c. En el colegio estudio y me distraigo.
d. La Tierra se traslada y rota en el espacio.
e. El mar es salado y traicionero.

Solución

Todas las anteriores proposiciones son compuestas pues utilizan el conectivo "y".
La proposición d es verdadera pues la Tierra efectúa movimientos de "traslación y de rotación.
La proposición b es falsa porque, aunque un día tiene 24 horas, es falso afirmar que una semana tiene 6 días. Esto sucede porque la "y" en el lenguaje popular indica que todas las condiciones mencionadas deben cumplirse.

Conclusión

La ***conjunción de dos proposiciones*** p, q es la unión de dichas proposiciones mediante la partícula "y". La conjunción se representa mediante el símbolo "$\wedge$".
La siguiente tabla explica el comportamiento de la conjunción de dos proposiciones:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Di cuáles de las siguientes proposiciones son falsas y cuáles son verdaderas:

a. $\sqrt{2}$ es irracional y real.
b. 8 es un entero negativo y natural.
c. $4 < 5$ y $5 < 4$
d. 3 es divisor de 13 y 13 es múltiplo de 3.
e. $\frac{\pi}{\pi} = 1$ y $\frac{0}{0} = 0$
f. La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en los reales y $(-1)^2 = 1$

La proposición a es verdadera pues $\sqrt{2}$ es irracional y real a la vez.
La proposición b es falsa, ya que 8 es entero positivo.
La proposición c es falsa, pues 5 no es menor que 4.
La proposición d es falsa, pues 3 no es divisor de 13 ni 13 es múltiplo de 3.
La proposición e es falsa, pues la división por cero no está determinada.
La proposición f es falsa porque la raíz par de un número negativo no existe en los reales.

6. DISYUNCIÓN INCLUSIVA

Ejemplo

Observemos las siguientes proposiciones:

a. Los peces nadan o las ballenas caminan.
b. Está lloviendo o está haciendo frío.
c. Los parques sirven para divertirse o para descansar.
d. Las ballenas son reptiles o cuadrúpedos.
e. La Tierra es plana o el mar es morado.

Solución

Las anteriores proposiciones son compuestas pues utilizan el conectivo "o".
La proposición d es falsa pues las ballenas son mamíferos y no reptiles, además, no son cuadrúpedos porque no tienen patas.
La proposición c es verdadera porque los parques pueden servir para ambos propósitos.
La proposición a es verdadera pues los peces nadan.
La proposición e es falsa pues ninguna de las condiciones se cumple.
Esto sucede porque la "o" se utiliza para dar opción de que por lo menos una de las condiciones planteadas ocurra.

Conclusión

La ***disyunción inclusiva*** de dos proposiciones p, q es la unión de dichas proposiciones mediante la partícula "o". La disyunción inclusiva "o" se representa mediante "$\vee$".
La siguiente tabla presenta la disyunción inclusiva de dos proposiciones:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Expresemos cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a. π es un número racional o entero.
b. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto o tiene dos elementos.
c. Un factor común de la expresión $x^2y + x^3y^2$ es x^2 o x^2y
d. $\sqrt{16} = 4$ o $11 - 7 = 6$
e. $2^2 = -4$ o $3^2 = -9$
f. $\sqrt{2}$ es racional o 1 es impar.

La proposición a es falsa, pues π es irracional.
La proposición b es verdadera, pues vacío es subconjunto de cualquier conjunto.
La proposición c es verdadera, pues tanto x^2 como x^2y son factores comunes de $x^2y + x^3y^2$.
La proposición d es verdadera ya que la raíz cuadrada de 16 es 4.
La proposición e es falsa, pues ningún número real elevado a una potencia par es negativo.
La proposición f es verdadera ya que 1 es impar.

7. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Ejemplo Observemos las siguientes proposiciones:

a. María está viva o muerta.
b. Es de día o es de noche.
c. Ser o no ser.
d. Es domingo o es lunes.
e. El universo es finito o infinito.
f. Danilo duerme o nada.

Solución Las proposiciones anteriores utilizan el conectivo "o", pero con la cualidad de que las condiciones planteadas no pueden presentarse al mismo tiempo; por ejemplo:

Si María está viva es imposible que también esté muerta y si María está muerta no puede estar viva al mismo tiempo.

Si hoy es domingo no puede ser lunes y si hoy es lunes no puede ser domingo.

Si el universo es finito tiene fin, por tanto, no puede ser infinito y si el universo es infinito no tiene fin, por tanto, no puede ser finito.

Conclusión La ***disyunción exclusiva*** de dos proposiciones p, q es la unión de dos proposiciones mediante el conectivo "o" con la condición de que solamente una de las dos opciones planteadas puede cumplirse y no las dos al mismo tiempo. La disyunción exclusiva "o" se representa "$\underline{\vee}$". La siguiente es la tabla de la disyunción exclusiva de dos proposiciones:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Identifiquemos cuáles de las siguientes proposiciones se refieren a una disyunción inclusiva, cuáles a una disyunción exclusiva, cuáles son verdaderas y cuáles son falsas:

a. 5 es impar o es par.
b. $x^2 + y^2$ no puede factorizarse en los reales o $x^2 - y^2$ si puede factorizarse en los reales.
c. 19 es positivo o negativo.

a. Ningún número puede ser par o impar a la vez, en particular el 5. Por tanto, ésta es una disyunción exclusiva verdadera.
b. Como las dos proposiciones pueden presentarse al mismo tiempo, ésta es una disyunción inclusiva verdadera.
c. Ningún número puede ser positivo y negativo al mismo tiempo. Por tanto, ésta es una disyunción exclusiva verdadera.

8. CONDICIONAL

Ejemplo

Observemos las siguientes proposiciones:

a. Si voy al colegio, entonces estudio.
b. Si la ballena es un mamífero, entonces es vertebrado.
c. Si lloro, entonces estoy triste.
d. Si hago deporte, entonces no me enfermo.
e. Si voy a la fiesta, entonces me divierto.
f. Si los hombres vuelan, entonces yo soy supermán.
g. Si estudio, entonces me enfermo.

Solución

Las proposiciones anteriores condicionan una situación respecto a otra, utilizando la expresión "si... entonces...". Dichas proposiciones reciben el nombre de condicionales.

Conclusión

Una ***condicional*** es una proposición de la forma "si p entonces q", donde "p es una condición suficiente para que q se cumpla" o "q es una condición necesaria para que p se cumpla".

La condicional de dos proposiciones p, q se simboliza "$p \Rightarrow q$" y se lee "p implica q", donde p se llama ***antecedente*** o ***hipótesis*** y q, ***consecuente*** o ***tesis***. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hallemos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. Si $\frac{3}{4}$ es positivo, entonces $\frac{3}{4} > -1$
b. Si $(-5) + (-3) = 15$, entonces $(-5)(-3) = 15$ F V V
c. Si $2 + 3 = 5$, entonces $5 - 3 \neq 2$ V F = F
d. Si $2^3 = 6$, entonces $3^2 = 6$
e. Si $(-5)^2$ es positivo, entonces $(-5)^3$ es positivo

a. Las dos proposiciones simples que forman el condicional son verdaderas. Por tanto, la proposición es verdadera.
b. Esta proposición es verdadera porque el antecedente es falso y el consecuente es verdadero.
c. Este condicional es falso pues el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.
d. Este condicional es verdadero porque $2^3 = 6$ es falso, luego, quedamos en total libertad de concluir lo que queramos.
e. Esta proposición es falsa, pues de una verdad no podemos concluir una falsedad.

9. BICONDICIONAL

Ejemplo Observemos las siguientes proposiciones:

a. Aprobaré el año si y sólo si apruebo todas las materias.
b. Estoy vivo si y sólo si no he muerto.
c. Es de día si y sólo si hay sol.
d. Si hace frío, entonces es de noche y si es de noche, entonces hace frío.
e. Los perros son animales cuadrúpedos si y sólo si tienen cuatro patas.

Solución Estas proposiciones permiten observar la utilización de la expresión "...si y sólo si..."

Conclusión Una ***bicondicional*** es una proposición de la forma "***p si y sólo si q***", donde "p es una condición necesaria y suficiente para q". La bicondicional de las proposiciones p, q se simboliza "$p \Leftrightarrow q$" y se lee "p equivale a q". La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Hallemos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. 100 es divisible por 5 si y sólo si termina en cero o en cinco.
b. 9 es impar si y sólo si es primo.
c. $11 - 4 = 7$ si y sólo si $7 + 4 = 11$.
d. El sucesor de 19 es 20 si y sólo si el antecesor de 20 es 19.
e. $7^2 - 5^2 = 2^2$ si y sólo si $7^2 - 5^2 = 24$.
f. $\sqrt{25-16} = 3$ si y sólo si $5^2 - 4^2 = 3^2$.
g. Todo triángulo equilátero es rectángulo si y sólo si todo triángulo rectángulo es equilátero.

La proposición a es verdadera pues las dos proposiciones simples que la forman son verdaderas.
La proposición b es falsa, ya que 9 es impar y no es primo.
La proposición c es verdadera porque se cumplen ambas igualdades.
La proposición d es verdadera porque las dos proposiciones que la componen son verdaderas.
La proposición e es falsa porque la primera igualdad no se cumple, mientras que la segunda sí.
La proposición f es verdadera, ya que las dos igualdades se cumplen.
La bicondicional g es verdadera pues las dos proposiciones que la forman son falsas.